

Cycles positifs dans les variétés abéliennes

Max Rempel

Résumé

Dans la première partie, on étudie la structure de la \mathbb{R} -algèbre engendrée par les classes de Hodge sur une puissance A^e d'une variété abélienne principalement polarisée très générale A de dimension n . La deuxième partie est consacrée à la comparaison de diverses notions de positivité pour des cycles de codimension supérieure dans A^e . En particulier, on montre qu'il y a, en toute codimension $2 \leq k \leq en - 2$, des classes numériquement effectives qui ne sont pas pseudoeffectives, ce qui généralise un résultat de Debarre, Ein, Lazarsfeld et Voisin.

Abstract

In the first part, we study the structure of the \mathbb{R} -algebra generated by the Hodge classes on the self-product A^e of a very general principally polarized abelian variety A . In the second part, we compare various notions of positivity for cycles of higher codimension in A^e . In particular, we prove that, in every codimension $2 \leq k \leq en - 2$, there exist classes that are numerically effective but not pseudoeffective, which generalises a result of Debarre, Ein, Lazarsfeld and Voisin.

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 2 |
| 2 | La structure de l'algèbre $N^\bullet(A^e)$ | 4 |
| 2.1 | Le groupe de Hodge d'une variété abélienne | 4 |
| 2.2 | Classes de Hodge sur les puissances d'une variété abélienne | 6 |
| 2.3 | Générateurs et relations pour les classes de Hodge | 6 |
| 3 | Classes positives | 11 |
| 3.1 | Le cône $S^k \text{Psef}^1(A^e)$ | 12 |
| 3.2 | Le cône semipositif | 14 |
| 3.2.1 | Décomposition des formes hermitiennes | 15 |
| 3.2.2 | Le cas $A \times A$ | 17 |
| 4 | Comparaison des cônes | 23 |
| 4.1 | Classes pseudoeffectives et classes semipositives | 23 |
| 4.2 | Classes numériquement effectives et classes pseudoeffectives | 26 |
| | Références | 29 |

1 Introduction

Soit B une variété abélienne complexe de dimension m . Notons $N^k(B)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des classes de cohomologie de cycles de codimension k à coefficients réels sur B et posons

$$N^\bullet(B) = \bigoplus_{k \geq 0} N^k(B).$$

Le produit d'intersection munit ce \mathbb{R} -espace vectoriel d'une structure de \mathbb{R} -algèbre.

Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension fixée. Le but de cet article est d'étudier la structure de l'algèbre $N^\bullet(A^e)$ et de divers cônes de classes « positives » dans $N^k(A^e)$.

Question 1.1. *Que peut-on dire de la structure de la \mathbb{R} -algèbre $N^\bullet(A^e)$?*

Il est connu que l'algèbre $N^\bullet(A^e)$ est engendrée par $N^1(A^e)$ (cf. [13] ou théorème 2.3). En utilisant l'action naturelle de $\mathrm{GL}_e(\mathbb{R})$ sur $N^\bullet(A^e)$, on montre le théorème suivant (théorème 2.8 et corollaire 2.14).

Théorème 1.2. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n . L'idéal I tel que*

$$N^\bullet(A^e) = \mathbf{S}^\bullet N^1(A^e)/I,$$

i.e., l'idéal des relations dans $\mathbf{S}^\bullet N^1(A^e)$, est engendré par des classes de cycles de codimension $n + 1$ et l'on peut en décrire des générateurs explicitement. En particulier, l'application

$$\mathbf{S}^k N^1(A^e) \rightarrow N^k(A^e)$$

est un isomorphisme si et seulement si $k \in \{0, \dots, n\}$.

La deuxième partie de l'article est consacrée à la question suivante, qui a été abordée dans [9] pour $e = 2$.

Question 1.3. *Que peut-on dire des classes « positives » dans $N^k(A^e)$?*

Pour préciser cette question, on rappelle d'abord diverses notions de positivité qui donnent chacune lieu à un cône convexe dans $N^k(B)$ (cf. [9, §1] et [3, Ch. III]).

1. Le cône des classes *pseudoeffectives* $\mathrm{Psef}^k(B)$ est le cône convexe fermé engendré par les classes de cycles effectifs.
2. Le cône des classes *numériquement effectives* (*nef*) $\mathrm{Nef}^k(B)$ est défini comme le dual du cône $\mathrm{Psef}^{m-k}(B)$ par rapport au produit d'intersection.

Si l'on écrit $B = V/\Lambda$ avec V un \mathbb{C} -espace vectoriel et Λ un réseau dans V , on peut identifier une classe $\alpha \in N^k(B)$ avec une (k, k) -forme réelle sur V qui s'identifie encore avec une forme hermitienne sur $\bigwedge^k V$ (cf. section 2.1). Cela nous permet de définir deux autres notions de positivité.

1. Une classe $\alpha \in N^k(B)$ est dite *fortement positive* si la (k, k) -forme associée s'écrit comme combinaison linéaire convexe de formes

$$il_1 \wedge \bar{l}_1 \wedge \dots \wedge il_k \wedge \bar{l}_k$$

avec $l_j \in V^*$ pour $j = 1, \dots, k$. On obtient ainsi le cône fermé $\mathrm{Strong}^k(B)$ engendré par les classes fortement positives.

2. Enfin, on dit qu'une classe est *semipositive* si la forme hermitienne associée est semipositive et l'on note $\mathrm{Semi}^k(B)$ le cône engendré par ces classes.

Le lien entre ces cônes est donné par la chaîne d'inclusions [9, Lemma 1.5]

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(B) \subset \text{Psef}^k(B) \subset \text{Strong}^k(B) \subset \text{Semi}^k(B) \subset \text{Nef}^k(B), \quad (1)$$

où l'on note $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(B)$ le cône convexe engendré par les produits de k éléments de $\text{Psef}^1(B)$. Pour $k = 1, m - 1$, tous les cônes de la chaîne (1) coïncident, de sorte que l'on a un seul cône qui a été déterminé par Prendergast-Smith dans [10]. Pour $2 \leq k \leq m - 2$, on se demande quelles inclusions sont strictes et quelles inclusions sont des égalités.

La conjecture suivante est un cas particulier d'une conjecture de Harvey et Knapp [6], qui a été précisée par Lawson dans [8].

Conjecture 1.4. *Soit B une variété abélienne de dimension m . Alors on a, pour tout $1 \leq k \leq m$,*

$$\text{Psef}^k(B) = \text{Strong}^k(B).$$

En générale, il est difficile de décrire les cônes $\text{Psef}^k(B)$ et $\text{Strong}^k(B)$ explicitement, ce qui rend la vérification de la conjecture 1.4 difficile.

Pour A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension $n \geq 2$, on a par la proposition 5.2 de [9],

$$\mathbf{S}^2 \text{Psef}^1(A \times A) = \text{Semi}^2(A \times A),$$

et

$$\mathbf{S}^{2n-2} \text{Psef}^1(A \times A) = \text{Strong}^{2n-2}(A \times A),$$

ce qui vérifie la conjecture 1.4 dans ces deux cas.

Question 1.5. *Si A est une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n , a-t-on*

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) = \text{Psef}^k(A^e) = \text{Strong}^k(A^e) = \text{Semi}^k(A^e)$$

pour tout $k \in \{0, \dots, ne\}$ et tout $e \geq 2$?

On obtient le résultat partiel suivant (théorème 4.4 et proposition 4.5).

Théorème 1.6. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n et soit $e \geq 2$.*

1. *On a*

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) \subsetneq \text{Semi}^k(A^e)$$

pour $3 \leq k \leq n$, et les rayons extrémaux du cône $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A \times A)$ sont aussi extrémaux dans le cône $\text{Semi}^k(A \times A)$ pour $2 \leq k \leq n$.

2. *Pour $n = 3$, on a*

$$\mathbf{S}^4 \text{Psef}^1(A \times A) = \text{Semi}^4(A \times A).$$

La conjecture 1.4, resp. la question de savoir si le cône $\text{Psef}^k(A^e)$ coïncide avec l'un des deux cônes $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ ou $\text{Semi}^k(A^e)$, reste ouverte pour $k \geq 3$ et $e \geq 2$ (resp. $k \geq 2$ et $e \geq 3$).

Pour la relation entre les cônes $\text{Psef}^k(A \times A)$ et $\text{Nef}^k(A \times A)$, les auteurs de [9] montrent que, pour A une surface, on a

$$\text{Psef}^2(A \times A) \subsetneq \text{Nef}^2(A \times A),$$

ce qui nous mène à la question suivante.

Question 1.7. Si A est une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n , a-t-on

$$\text{Psef}^k(A^e) \subsetneq \text{Nef}^k(A^e)$$

pour tout $2 \leq k \leq en - 2$?

Concernant la question 1.7, on a le résultat suivant (théorème 4.9).

Théorème 1.8. Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n et soit $e \geq 2$. On a

$$\text{Psef}^k(A^e) \subsetneq \text{Nef}^k(A^e)$$

pour $2 \leq k \leq en - 2$.

Les points clefs dans les démonstrations du théorème 1.6 et du théorème 1.8 sont d'un côté l'utilisation du fait que tous les cônes dans la chaîne (1) sont invariants sous l'action de $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ sur $N^\bullet(A^e)$ et d'autre côté la caractérisation des cônes $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ et $\text{Semi}^k(A^e)$. Expliquons rapidement les résultats que l'on obtient concernant ces deux cônes : par un résultat de Prendergast-Smith [10], le cône $\text{Psef}^1(A)$ est homogène sous l'action de $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ et ses classes extrémales forment une orbite, ce qui permet une description facile des générateurs de $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ (proposition 3.6). D'autre côté, le cône des classes semipositives correspond naturellement à un cône de matrices (en regardant les matrices représentant les formes hermitiennes associées aux classes dans $N^k(A^e)$), de sorte que l'on pourrait espérer calculer ces matrices et d'en obtenir des inéquations définissant $\text{Semi}^k(A^e)$. Pour $k = 2$ et $e = 2$ les matrices sont très petites, de sorte que les calculs ne posent pas de problèmes alors que, pour $k \geq 3$ et $e \geq 2$ (resp. pour $k = 2$ et $e \geq 3$), les matrices deviennent rapidement beaucoup plus grandes, ce qui rend les calculs très pénibles déjà pour $k = 3$ et $e = 2$. On résout ce problème en décrivant la structure de ces matrices plus conceptuellement : écrivons $A = U/\Gamma$ avec U un \mathbb{C} -espace vectoriel et Γ un réseau dans U . L'action de $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ sur $N^\bullet(A^e)$ provient d'une action sur $U^{\oplus e}$, et en utilisant la théorie des représentations, on montre que les matrices représentant les formes hermitiennes associées aux classes dans $N^k(A^e)$ sont des matrices diagonales par blocs, et ces blocs correspondent aux modules irréductibles dans une décomposition du $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ -module $\bigwedge^k U^{\oplus e}$. Pour deux modules différents isomorphes dans une décomposition de $\bigwedge^k U^{\oplus e}$, les blocs correspondants sont identiques et un bloc se calcule à partir des matrices représentant l'action de $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ sur le module irréductible de $\bigwedge^k U^{\oplus e}$ correspondant (proposition 3.9 et remarque 3.10). Pour calculer les matrices représentant les formes hermitiennes associées aux classes dans $N^k(A^e)$, on est ainsi essentiellement ramené à

1. décomposer $\bigwedge^k U^{\oplus e}$ en $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ -modules irréductibles,
2. calculer les matrices représentant l'action de $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ sur les $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ -modules irréductibles apparaissant dans $\bigwedge^k U^{\oplus e}$.

Je tiens à remercier chaleureusement O. Debarre pour avoir suggéré ce sujet et pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés.

2 La structure de l'algèbre $N^\bullet(A^e)$

2.1 Le groupe de Hodge d'une variété abélienne

Soit B une variété abélienne complexe de dimension m et écrivons $B = V/\Lambda$, où V est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension m et $\Lambda \subset V$ est un réseau. On a $\Lambda = H_1(B, \mathbb{Z})$

et $H^1(B, \mathbb{Z}) = \Lambda^*$, où l'on note Λ^* le réseau dual à Λ . Soit $K = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{R} , et posons $V_K = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} K$. Pour $k \geq 1$, le cup-produit fournit un isomorphisme

$$H^k(B, \mathbb{Z}) \simeq \bigwedge^k \Lambda^*.$$

Rappelons que l'on a (cf. [7, Thm. 1.4.1])

$$H^{p,q}(B) = \bigwedge^p V^* \otimes \bigwedge^q \overline{V}^*, \quad (2)$$

où $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ et \overline{V}^* est l'espace vectoriel des formes \mathbb{C} -antilinéaires sur V .

Soit

$$N^k(B)_{\mathbb{Q}} = H^{k,k}(B) \cap H^{2k}(B, \mathbb{Q})$$

le \mathbb{Q} -espace vectoriel des classes de Hodge (rationnelles) de degré $2k$ sur B . Posons $N^k(B) = N^k(B)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ et notons $N^\bullet(B) = \bigoplus_{k \geq 0} N^k(B)$ la \mathbb{R} -algèbre définie dans l'introduction. Remarquons que l'on a par (2) une injection de $N^k(B)$ dans l'espace vectoriel réel des (k, k) -formes réelles sur V , que l'on note $\bigwedge_{\mathbb{R}}^{(k,k)} V^*$. Cet espace vectoriel est isomorphe à celui des formes hermitiennes sur $\bigwedge^k V$, que l'on note \mathcal{H} : si l'on munit V de coordonnées (z_1, \dots, z_n) et V^* des coordonnées duales, cet isomorphisme est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\rightarrow \bigwedge_{\mathbb{R}}^{(k,k)} V^* \\ \sum_{I,J} h_{IJ} dz_I \otimes d\bar{z}_J &\mapsto \sqrt{-1}^{k^2} \sum_{I,J} h_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J, \end{aligned}$$

où $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k}$, et de même pour J . On peut ainsi associer à une classe de Hodge sur B de degré $2k$ une forme hermitienne sur $\bigwedge^k V$, que l'on notera H_α .

Soit $J : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$ la structure complexe associée à

$$H_1(B, \mathbb{C}) = H^{-1,0}(B) \oplus H^{0,-1}(B).$$

On obtient un morphisme

$$\begin{aligned} h_J : \mathbb{S}^1 &\rightarrow \text{SL}(V_{\mathbb{R}}) \\ e^{\sqrt{-1} \cdot \theta} &\mapsto \cos \theta \cdot id_V + \sin \theta \cdot J, \end{aligned}$$

qui agit par multiplication par z sur $H^{1,0}(B)$ et par multiplication par \bar{z} sur $H^{0,1}(B)$ (cf. [7, Prop. 17.1.1, Rem. 17.1.2]).

Définition 2.1. Le *groupe de Hodge* de B , noté $\text{Hg}(B)$, est le plus petit sous-groupe de $\text{SL}(V_{\mathbb{R}})$ défini sur \mathbb{Q} contenant l'image de h_J .

Soit $\theta \in H^2(B, \mathbb{Z})$ une polarisation de B . Par l'isomorphisme $H^2(B, \mathbb{Q}) = \bigwedge^2 V_{\mathbb{Q}}^*$, θ définit une forme alternée non-dégénérée

$$\omega_\theta : V_{\mathbb{Q}} \times V_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}.$$

On note $\text{Sp}(V_{\mathbb{Q}}, \omega_\theta)$ le groupe symplectique associé à ω_θ , qui est naturellement un sous-groupe algébrique de $\text{SL}(V_{\mathbb{Q}})$. Le groupe de Hodge $\text{Hg}(B)$ est un sous-groupe de $\text{Sp}(V_{\mathbb{Q}}, \omega_\theta)$ pour toute polarisation θ [7, Prop. 17.3.2]. En particulier, $\text{Hg}(B)$ agit naturellement sur $V_{\mathbb{Q}}$.

Notation 2.2. Si G est un groupe et M est un G -module, on note M^G l'ensemble des invariants dans M sous l'action de G .

Regardons $H^1(B, \mathbb{Q}) = V_{\mathbb{Q}}^*$ comme représentation duale de $\mathrm{Hg}(B)$. Par l'isomorphisme $H^k(B, \mathbb{Q}) = \bigwedge^k V_{\mathbb{Q}}^*$, on obtient ainsi une structure de $\mathrm{Hg}(B)$ -module sur $H^k(B, \mathbb{Q})$ pour $k \geq 1$. Par l'égalité [7, 17.3.3]

$$N^k(B)_{\mathbb{Q}} = H^{2k}(B, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(B)},$$

on est ainsi ramené à un calcul des invariants pour déterminer les classes de Hodge.

2.2 Classes de Hodge sur les puissances d'une variété abélienne

Soit A une variété abélienne (pas forcément principalement polarisée très générale). On veut étudier l'algèbre des classes de Hodge sur des puissances de A . Écrivons $A = U/\Gamma$, où U est un \mathbb{C} -espace vectoriel et Γ est un réseau dans U . Si l'on écrit $A^e = (U \otimes_{\mathbb{Z}} W_{\mathbb{Z}})/(\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} W_{\mathbb{Z}})$, on obtient une injection

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(W_{\mathbb{Z}}) &\rightarrow \mathrm{End}(A^e) \\ g &\mapsto u_g, \end{aligned}$$

où u_g est défini par l'application linéaire

$$\begin{aligned} U \otimes_{\mathbb{Z}} W_{\mathbb{Z}} &\rightarrow U \otimes_{\mathbb{Z}} W_{\mathbb{Z}} \\ u \otimes w &\mapsto u \otimes {}^t g w. \end{aligned}$$

Posons, pour $g \in \mathrm{End}(W_{\mathbb{Z}})$ et pour $\alpha \in H^{\bullet}(A^e, \mathbb{Q})$,

$$g \cdot \alpha = u_g^* \alpha.$$

Cela induit une action de $\mathrm{GL}(W_{\mathbb{Q}})$ sur $H^{\bullet}(A^e, \mathbb{Q})$, et l'on a

$$H^k(A^e, \mathbb{Q}) \simeq \bigwedge^k U^* \otimes W_{\mathbb{Q}}$$

en tant que $\mathrm{GL}(W_{\mathbb{Q}})$ -modules, où $\mathrm{GL}(W_{\mathbb{Q}})$ agit sur $W_{\mathbb{Q}}$ tautologiquement.

Or, par un résultat de Hazama [4, Cor. 1.11], on a

$$\mathrm{Hg}(A^e) = \mathrm{Hg}(A), \tag{3}$$

et $\mathrm{Hg}(A)$ agit diagonalement sur $H^1(A^e, \mathbb{Q})$, i.e.,

$$\forall g \in \mathrm{Hg}(A) \quad \forall u \in U_{\mathbb{Q}}^* \quad \forall w \in W_{\mathbb{Q}} \quad g \cdot (u \otimes w) = g \cdot u \otimes w.$$

On obtient ainsi une structure de $\mathrm{Hg}(A) \times \mathrm{GL}(W_{\mathbb{Q}})$ -module sur $H^k(A^e, \mathbb{Q})$. Par construction, $N^{\bullet}(A^e)_{\mathbb{Q}}$ est invariant sous l'action de $\mathrm{GL}(W_{\mathbb{Q}})$.

2.3 Générateurs et relations pour les classes de Hodge

Soit maintenant (A, θ) une variété abélienne principalement polarisée très générale et reprenons les notations de la section précédente. Par un résultat de Tankeev, l'algèbre $N^{\bullet}(A^e)$ est engendrée par des classes de codimension 1 (théorème 2.3), de sorte que l'application canonique $\mathbf{S}^{\bullet} N^1(A^e) \rightarrow N^{\bullet}(A^e)$ est surjective. On détermine des générateurs de $N^{\bullet}(A^e)$ et l'idéal des relations dans $\mathbf{S}^{\bullet} N^1(A^e)$ (proposition 2.11 et corollaire 2.14). Le groupe de Hodge d'une variété abélienne principalement polarisée très générale étant le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(U_{\mathbb{Q}})$ (par rapport à la polarisation

principale), on est ramené à l'étude de l'algèbre des invariants $(\bigwedge^\bullet U_{\mathbb{Q}}^* \otimes W_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Sp}(U_{\mathbb{Q}})}$ en tant que $\mathrm{GL}(W_{\mathbb{Q}})$ -module pour obtenir ces résultats. Comme cette algèbre a été étudiée par Thompson dans [14], notre travail consiste essentiellement à traduire ses résultats dans notre cadre.

Soit $K = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{R} . On a

$$H^k(A^e, K) \simeq \bigwedge^k (U_K^* \otimes_{\mathbb{Z}} W_{\mathbb{Z}}).$$

Théorème 2.3 (Tankeev). *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale. Alors on a*

$$\mathrm{Hg}(A^e) = \mathrm{Sp}(U_{\mathbb{Q}}) \quad (4)$$

et $N^\bullet(A^e)_{\mathbb{Q}}$ est engendré par des classes de codimension 1.

Démonstration. Pour montrer (4), il suffit par (3) de remarquer que l'on a $\mathrm{Hg}(A) = \mathrm{Sp}(U_{\mathbb{Q}})$ pour A très générale (cf. [7, Prop. 17.4.2]). Il s'ensuit

$$N^\bullet(A^e)_{\mathbb{Q}} = \left(\bigwedge^{2k} V_{\mathbb{Q}}^* \right)^{\mathrm{Sp}(U_{\mathbb{Q}})}.$$

Par un théorème de Howe [5, Thm. 2] (cf. aussi [11, pp. 529-530]), l'algèbre à droite est engendrée par des classes de degré 2, ce qui fournit le résultat souhaité. \square

L'action de $\mathrm{Sp}(U_{\mathbb{Q}}) \times \mathrm{GL}(W_{\mathbb{Q}})$ sur $V_{\mathbb{Q}}^* = U_{\mathbb{Q}}^* \otimes W_{\mathbb{Q}}$ s'étend naturellement à une action de $\mathrm{Sp}(U_{\mathbb{R}}) \times \mathrm{GL}(W_{\mathbb{R}})$ sur $V_{\mathbb{R}}^* = U_{\mathbb{R}}^* \otimes W_{\mathbb{R}}$, et comme $\mathrm{Sp}(U_{\mathbb{Q}})$ est dense dans $\mathrm{Sp}(U_{\mathbb{R}})$, on a

$$N^\bullet(A^e) = \left(\bigwedge^{2k} V_{\mathbb{Q}}^* \right)^{\mathrm{Sp}(U_{\mathbb{Q}})} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \left(\bigwedge^{2k} V_{\mathbb{R}}^* \right)^{\mathrm{Sp}(U_{\mathbb{R}})}.$$

Comme expliqué plus haut, nous traduisons maintenant les résultats de Thompson [14] dans notre cadre. Pour faciliter les notations pour la suite, on pose $W = W_{\mathbb{R}}$. La proposition suivante correspond à [14, proposition 2.2].

Proposition 2.4. *On a un isomorphisme de $\mathrm{GL}(W)$ -modules*

$$N^\bullet(A^e) \simeq \bigoplus_{\sigma} \mathbb{S}_{\sigma}(W),$$

où l'on note \mathbb{S}_{σ} le foncteur de Schur correspondant au tableau de Young σ et où l'on prend la somme sur les σ tels que

1. chaque ligne de σ a un nombre pair d'éléments,
2. la première ligne a au plus $2n$ éléments et
3. le nombre de lignes est au plus e .

Corollaire 2.5. *On a*

$$N^1(A^e) \simeq \mathbf{S}^2 W$$

en tant que $\mathrm{GL}(W)$ -modules.

Démonstration. Le tableau de Young ayant une ligne à 2 cases correspond au $\mathrm{GL}(W)$ -module $\mathbf{S}^2 W$, et l'on a donc $N^1(A^e) = \mathbf{S}^2 W$. \square

De plus, on a le résultat suivant [15, 2.3.8].

Proposition 2.6. *On a un isomorphisme de $\mathrm{GL}(W)$ -modules*

$$\mathbf{S}^\bullet(\mathbf{N}^1(A^e)) = \bigoplus_{\sigma} \mathbb{S}_{\sigma}(W),$$

où l'on note \mathbb{S}_{σ} le foncteur de Schur correspondant au tableau de Young σ et où l'on prend la somme sur les σ tels que

1. chaque ligne de σ a un nombre pair d'éléments,
2. le nombre de lignes est au plus e .

Comme $\mathbf{S}^{2k} W$ correspond au tableau de Young ayant une ligne à $2k$ cases, on voit qu'il existe une injection canonique

$$\varepsilon_k : \mathbf{S}^{2k} W \rightarrow \mathbf{S}^k(\mathbf{N}^1(A^e)). \quad (5)$$

Par un résultat d'Abeasis [1, Thm. 3.1], on en déduit le résultat suivant.

Proposition 2.7. *Soit k un entier positif fixé, et soit I_k l'idéal engendré par $\varepsilon_k(\mathbf{S}^{2k} W)$ dans $\mathbf{S}^\bullet(\mathbf{N}^1(A^e))$. Alors I_k est $\mathrm{GL}(W)$ -invariant et*

$$I_k = \bigoplus_{\sigma} \mathbb{S}_{\sigma}(W),$$

où l'on note \mathbb{S}_{σ} le foncteur de Schur correspondant au tableau de Young σ et où l'on prend la somme sur les σ tels que

1. chaque ligne de σ a un nombre pair d'éléments,
2. la première ligne a au moins $2k$ éléments et
3. le nombre des lignes est au plus e .

Le résultat principal de Thompson se traduit alors comme suit dans notre cadre [14, Thm. 2.3].

Théorème 2.8. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n , et soit I_{n+1} l'idéal engendré par $\varepsilon_{n+1}(\mathbf{S}^{2n+2} W)$ dans $\mathbf{S}^\bullet(\mathbf{N}^1(A^e))$. Alors*

$$\mathbf{S}^\bullet(\mathbf{N}^1(A^e))/I_{n+1} = \mathbf{N}^\bullet(A^e).$$

En particulier, l'application

$$\mathbf{S}^k \mathbf{N}^1(A^e) \rightarrow \mathbf{N}^k(A^e)$$

est un isomorphisme si et seulement si $k \in \{0, \dots, n\}$.

Corollaire 2.9. *Pour toute classe $\alpha \in \mathbf{N}^1(A^e)$ non nulle et pour tout $0 \leq k \leq n-1$, l'application*

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^k(A^e) &\rightarrow \mathbf{N}^{k+1}(A^e) \\ \beta &\mapsto \alpha \cdot \beta \end{aligned}$$

est injective.

Déterminons maintenant des générateurs de $\mathbf{N}^\bullet(A^e)$. Comme A est principalement polarisée, on peut identifier A avec sa variété abélienne duale \hat{A} , ce qui nous permet de voir le fibré de Poincaré \mathcal{P} comme un fibré sur $A \times A$. Soient $p_{i_1, \dots, i_l} : A^e \rightarrow A^l$ les projections. Posons

$$\theta_i = p_i^* \theta \quad \text{et} \quad \lambda_{jk} = c_1(p_{jk}^* \mathcal{P}).$$

Remarque 2.10. Notons A_i le i -ème facteur de A^e . Dans la décomposition de Künneth de $H^2(A^e, \mathbb{R})$, la classe θ_i est contenue dans la composante correspondant à $H^2(A_i, \mathbb{R})$, et λ_{jk} appartient à la composante correspondant à $H^1(A_j, \mathbb{R}) \otimes H^1(A_k, \mathbb{R})$ [7, Lemma 14.1.9].

On a la généralisation suivante de la proposition 3.1 de [9].

Proposition 2.11. *Soit (A, θ) une variété abélienne principalement polarisée très générale. La \mathbb{R} -algèbre $N^\bullet(A^e)$ est engendrée par les $\theta_i, 1 \leq i \leq e$ et les $\lambda_{jk}, 1 \leq j < k \leq e$.*

Démonstration. Par le corollaire 2.5, on a $N^1(A^e) \simeq \mathbf{S}^2 W$ et donc

$$\dim(N^1(A^e)) = \binom{e+1}{2}.$$

Comme les $\theta_i, \lambda_{jk}, 1 \leq i \leq e, 1 \leq j < k \leq e$ forment une famille libre de dimension $\binom{e}{2} + e = \binom{e+1}{2}$ dans $N^1(A^e)$ par la remarque 2.10, on obtient le résultat souhaité. \square

Déterminons maintenant comment $\mathrm{GL}(W)$ agit sur la base

$$\{\theta_i, \lambda_{jk} \mid 1 \leq i \leq e, 1 \leq j < k \leq e\}$$

de $N^1(A^e)$. Soit

$$v_{sr} = u_s \otimes w_r \quad 1 \leq s \leq n, 1 \leq r \leq e \quad (6)$$

une base de $V^* = U^* \otimes_{\mathbb{R}} W$ telle que l'on a dans les coordonnées associées (cf. [7, Lemme 3.6.4])

$$\begin{aligned} \theta_i &= \sum_{s=1}^n \sqrt{-1} dz_{si} \wedge d\bar{z}_{si}, \\ \lambda_{jk} &= \sum_{s=1}^n \sqrt{-1} dz_{sj} \wedge d\bar{z}_{sk} + \sqrt{-1} dz_{sk} \wedge d\bar{z}_{sj} \end{aligned} \quad (7)$$

pour $1 \leq i \leq e, 1 \leq j < k \leq e$.

Proposition 2.12. *Soit $g \in \mathrm{GL}(W)$ et soit $\rho(g)$ la matrice représentant g dans la base $\{w_1, \dots, w_e\}$. Sur l'ensemble des générateurs $\{\theta_i, \lambda_{jk} \mid 1 \leq i \leq e, 1 \leq j < k \leq e\}$ de $N^\bullet(A^e)$, la matrice $\rho(g)$ agit par :*

$$\begin{aligned} g\theta_i &= \sum_{j=1}^e \rho(g)_{ji}^2 \theta_j + \sum_{1 \leq j < k \leq e} \rho(g)_{ji} \rho(g)_{ki} \lambda_{jk}, \\ g\lambda_{jk} &= 2 \sum_{i=1}^e \rho(g)_{ij} \rho(g)_{ik} \theta_i + \sum_{1 \leq u < v \leq e} (\rho(g)_{vj} \rho(g)_{uk} + \rho(g)_{uj} \rho(g)_{vk}) \lambda_{uv}. \end{aligned}$$

Démonstration. Cela résulte d'un calcul direct dans les coordonnées (7) ou des arguments de [9, §3]. \square

Remarque 2.13. Si $\{w_1, \dots, w_e\}$ est une base de W , il découle de la proposition 2.12 que l'on obtient l'isomorphisme $N^1(A^e) \simeq \mathbf{S}^2 W$ en identifiant θ_i avec w_i^2 et λ_{jk} avec $2w_j w_k$ pour $1 \leq i \leq e, 1 \leq j < k \leq e$.

Soit $m : A^e \rightarrow A$ l'application d'addition. Alors on a

$$m^* \theta = \sum_{i=1}^e \theta_i + \sum_{1 \leq j < k \leq e} \lambda_{jk}$$

et donc

$$\left(\sum_{i=1}^e \theta_i + \sum_{1 \leq j < k \leq e} \lambda_{jk} \right)^{n+1} = 0 \quad (8)$$

dans $H^{2n+2}(A^e, \mathbb{R})$. Regardons maintenant $\left(\sum_{i=1}^e \theta_i + \sum_{1 \leq j < k \leq e} \lambda_{jk} \right)^{n+1}$ comme polynôme dans $\mathbf{S}^{n+1} \mathbf{N}^1(A^e)$ et écrivons

$$\left(\sum_{i=1}^e \theta_i + \sum_{1 \leq j < k \leq e} \lambda_{jk} \right)^{n+1} = \sum_l P_l,$$

où chaque polynôme P_l définit une classe dans un facteur de la décomposition de Künneth de $H^{2n+2}(A^e, \mathbb{R})$ (cf. remarque 2.10 et exemple 2.15). On obtient ainsi précisément un polynôme $P_l \neq 0$ pour chaque composante de Künneth, et par la relation (8), chaque polynôme P_l doit représenter la classe 0 dans $H^{2n+2}(A^e, \mathbb{R})$. On appelle les relations $P_l = 0$ dans $H^{2n+2}(A^e, \mathbb{R})$ ainsi obtenues, les *relations induites par la relation (8)*.

Corollaire 2.14. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n . Soit I l'idéal des relations dans $\mathbf{S}^\bullet \mathbf{N}^1(A^e)$, de sorte que $\mathbf{S}^\bullet \mathbf{N}^1(A^e)/I = \mathbf{N}^\bullet(A^e)$. Alors I est engendré par les relations induites par la relation*

$$\left(\sum_{i=1}^e \theta_i + \sum_{1 \leq j < k \leq e} \lambda_{jk} \right)^{n+1} = 0 \quad (9)$$

dans $H^{2n+2}(A^e, \mathbb{R})$ via la décomposition de Künneth.

Démonstration. On a

$$\binom{2n+1+e}{2n+2} = \dim \mathbf{S}^{2n+2} W$$

composantes dans la décomposition de Künneth de $H^{2n+2}(A^e, \mathbb{R})$, de sorte que l'équation (9) induit $\binom{2n+1+e}{2n+2}$ relations qui forment une famille libre dans $\mathbf{S}^{n+1}(\mathbf{N}^1(A^e))$. Par la proposition 2.7 et le théorème 2.8, on a $I \cap \mathbf{S}^{n+1}(\mathbf{N}^1(A^e)) \simeq \mathbf{S}^{2n+2} W$, d'où l'on déduit le résultat souhaité par une comparaison des dimensions. \square

Exemple 2.15. Supposons $n = 2$. On détermine les relations dans $\mathbf{S}^3 \mathbf{N}^1(A \times A)$ selon le corollaire 2.14. On a

$$(\theta_1 + \theta_2 + \lambda)^3 = \theta_1^3 + \theta_2^3 + \lambda^3 + 3\theta_1^2\theta_2 + 3\theta_1\theta_2^2 + 3\theta_1\lambda^2 + 3\theta_2\lambda^2 + 6\theta_1\theta_2\lambda$$

et

$$\begin{aligned} \theta_1^3 &\in H^6(A) \otimes H^0(A), & \theta_2^3 &\in H^0(A) \otimes H^6(A), \\ 3\theta_1^2\theta_2 + 3\theta_1\lambda^2 &\in H^4(A) \otimes H^2(A), & 3\theta_1\theta_2^2 + 3\theta_2\lambda^2 &\in H^2(A) \otimes H^4(A), \\ 3\theta_1^2\lambda &\in H^5(A) \otimes H^1(A), & 3\theta_2^2\lambda &\in H^1(A) \otimes H^5(A), \\ 6\theta_1\theta_2\lambda + \lambda^3 &\in H^3(A) \otimes H^3(A). \end{aligned}$$

Si l'on note I l'idéal des relations dans la \mathbb{R} -algèbre $\mathbf{N}^\bullet(A \times A)$, on a donc

$$I = \langle \theta_1^3, \theta_1^2\theta_2 + \theta_1\lambda^2, \theta_1^2\lambda, 6\theta_1\theta_2\lambda + \lambda^3, \theta_2^3, \theta_1\theta_2^2 + \theta_2\lambda^2, \theta_2^2\lambda \rangle.$$

Finissons par un résultat qui nous permet de faire des calculs d'intersections dans $\mathbf{N}^\bullet(A^e)$.

Proposition 2.16. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n . Les seuls monômes en θ_1, θ_2 et λ non nuls de degré $2n$ sont de la forme $\theta_1^{n-k}\theta_2^{n-k}\lambda^{2k}$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$, et l'on a*

$$\theta_1^{n-k}\theta_2^{n-k}\lambda^{2k} = (-1)^k(2k)!(n-k)!^2 \binom{n}{k}.$$

Démonstration. Il est clair que les monômes de degré $2n$ de la forme $\theta_1^{n-k}\theta_2^{n-k}\lambda^k$ sont précisément les monômes définissant une classe dans $H^n(A, \mathbb{R}) \otimes H^n(A, \mathbb{R})$ par rapport à la décomposition de Künneth (cf. remarque 2.10). Evidemment, c'est la seule composante non nulle, ce qui montre la première partie de l'énoncé. Pour la deuxième partie, on suppose que θ_1, θ_2 et λ sont donnés comme dans (7). Alors $\theta_1^{n-k}\theta_2^{n-k}$ correspond à la $(2(n-k), 2(n-k))$ -forme

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n \\ n+1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq 2n}} (n-k)!^2 z_{i_1} \wedge i\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_{n-k}} \wedge i\bar{z}_{i_{n-k}} \wedge z_{j_1} \wedge i\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge z_{j_{n-k}} \wedge i\bar{z}_{j_{n-k}}.$$

Si l'on écrit

$$\lambda^{2k} = \sum_{I, J} a_{IJ} dz_{i_1} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{2k}} \wedge d\bar{z}_{j_{2k}}$$

avec $a_{IJ} \in \mathbb{R}$ et I, J des multi-indices de longueur $2k$ dans $\{1, \dots, n\}$, on vérifie facilement que l'on a $a_{IJ} \neq 0$ et $a_{IJ} dz_{i_1} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{2k}} \wedge d\bar{z}_{j_{2k}} \wedge \theta_1^{n-k}\theta_2^{n-k} \neq 0$ si et seulement si $a_{IJ} dz_{i_1} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{2k}} \wedge d\bar{z}_{j_{2k}}$ est de la forme

$$\begin{aligned} & (2k)! z_{i_1} \wedge i\bar{z}_{i_1+n} \wedge z_{i_1+n} \wedge i\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_k} \wedge i\bar{z}_{i_k+n} \wedge z_{i_k+n} \wedge i\bar{z}_{i_k} \\ & = (-1)^{3k} (2k)! z_{i_1} \wedge i\bar{z}_{i_1} \wedge z_{i_1+n} \wedge i\bar{z}_{i_1+n} \wedge \dots \wedge z_{i_k} \wedge i\bar{z}_{i_k} \wedge z_{i_k+n} \wedge i\bar{z}_{i_k+n}. \end{aligned}$$

Or il y a $\binom{n}{k}$ telles formes $a_{IJ} dz_{i_1} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{2k}} \wedge d\bar{z}_{j_{2k}}$, et pour chaque telle forme on a

$$a_{IJ} dz_{i_1} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{2k}} \wedge d\bar{z}_{j_{2k}} \wedge \theta_1^{n-k}\theta_2^{n-k} = (-1)^k(2k)!(n-k)!^2,$$

de sorte que l'on obtient

$$\theta_1^{n-k}\theta_2^{n-k}\lambda^{2k} = (-1)^k(2k)!(n-k)!^2 \binom{n}{k}.$$

□

Remarque 2.17. Si A est de dimension n , on a

$$\mu^n = \sum_{k=0}^n 4^{n-k} (-1)^k \theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k} \lambda^{2k} = \sum_{k=0}^n 4^{n-k} (2k)!(n-k)!^2 \binom{n}{k} > 0.$$

Exemple 2.18. Soit $n = 2$. Alors on a (cf. [9, §4])

$$\theta_1^2 \theta_2^2 = 4, \quad \theta_1 \theta_2 \lambda^2 = -4, \quad \lambda^4 = 24, \quad \mu^2 = 96.$$

3 Classes positives

Soit A toujours une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n . Dans ce chapitre, on étudie la chaîne d'inclusions

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) \subset \text{Psef}^k(A^e) \subset (\text{Strong}^k(A^e) \subset) \text{Semi}^k(A^e) \subset \text{Nef}^k(A^e). \quad (10)$$

On commence avec des résultats sur le cône $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ (section 3.1) et ensuite on regarde le cône des classes semipositives $\text{Semi}^k(A^e)$ (section 3.2). Les résultats de ces deux sections nous permettent alors de déduire les théorèmes 1.6 et 1.8 de l'introduction (théorème 4.4 et théorème 4.9) dans les sections 4.1 et 4.2.

Remarque 3.1. Pour la variété abélienne A^e , tous les cônes dans la chaîne (10) sont invariants sous l'action de $\mathrm{GL}(W)$ sur $\mathbf{N}^\bullet(A^e)$ (cf. §2.1 et [9, Prop. 1.6 et p. 12]).

3.1 Le cône $\mathbf{S}^k \mathrm{Psef}^1(A^e)$

Dans cette section, on montre que le cône $\mathbf{S}^k \mathrm{Psef}^1(A^e)$ engendré par les intersections de k diviseurs pseudoeffectifs est fermé et l'on détermine ses rayons extrémaux pour $1 \leq k \leq n$ et $e \geq 2$ (proposition 3.6).

Regardons d'abord le cas $k = 1$ (cf. [7, §5.2] et [10]). Posons $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A^e) = \mathrm{End}(A^e) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Notons $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}^s(A^e)$ l'espace des éléments symétriques par rapport à l'involution de Rosati de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A^e)$ et T_x la translation par x dans A^e pour un $x \in A^e$ fixé. Ayant $\widehat{A^e} \simeq A^e$, on obtient un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^1(A^e) &\simeq \mathrm{End}_{\mathbb{R}}^s(A^e) \\ L &\mapsto \phi_L \end{aligned}$$

de \mathbb{R} -espaces vectoriels, où $\phi_L(x) = T_x^* L \otimes L^{-1}$. Si l'on identifie $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A^e)$ avec l'algèbre de matrices $\mathrm{Mat}_e(\mathbb{R})$, l'involution de Rosati correspond à l'involution qui envoie une matrice sur sa transposée, de sorte que $\mathbf{N}^1(A^e)$ est isomorphe à l'espace des matrices $e \times e$ réelles symétriques $\mathrm{Sym}_e(\mathbb{R})$. Comme les valeurs propres de ϕ_L sont les mêmes que ceux d'une matrice représentant la forme hermitienne H_L associée à L [7, Lemme 2.4.5], le cône $\mathrm{Nef}^1(A^e)$ correspond au cône $\mathrm{Sym}_e^+(\mathbb{R})$ des matrices réelles symétriques positives. De plus, l'action de $\mathrm{GL}(W)$ sur $\mathbf{N}^1(A^e)$ correspond à l'action de $\mathrm{GL}_e(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Sym}_e(\mathbb{R})$ donnée par [10, Theorem 4.2]

$$\forall g \in \mathrm{GL}_e(\mathbb{R}) \quad \forall M \in \mathrm{Sym}_e(\mathbb{R}) \quad g \cdot M = g M {}^t g,$$

de sorte que le cône $\mathrm{Nef}^1(A^e)$ est homogène sous l'action de $\mathrm{GL}(W)$.

Ayant $\phi_{\theta_i}(x_1, \dots, x_e) = (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$, on voit que θ_i correspond à une matrice symétrique de rang 1 dans $\mathrm{Sym}_e^+(\mathbb{R})$, d'où l'on déduit que θ_i est extrémal dans $\mathrm{Nef}^1(A^e)$. Toutes les matrices symétriques positives de rang 1 étant congruentes sous l'action de $\mathrm{GL}(W)$, on obtient comme cas particulier de [10, Thm 4.3] l'énoncé suivant.

Proposition 3.2. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale. Le cône $\mathrm{Psef}^1(A^e) = \mathrm{Nef}^1(A^e)$ est homogène sous l'action de $\mathrm{GL}(W)$ et l'ensemble de ses rayons extrémaux correspond à l'orbite $\mathrm{GL}(W) \cdot \theta_1$.*

Avant d'étudier le cône $\mathbf{S}^k \mathrm{Psef}^1(A^e)$ pour $k \geq 2$, on aura besoin des notations suivantes.

Notation 3.3. Si E est un sous-ensemble de \mathbb{R}^d , on note $\mathrm{conv}(E)$ l'enveloppe convexe de E et $\mathrm{cone}(E)$ le cône convexe engendré par E . Pour un cône convexe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$, on note $\mathrm{ext}(\mathcal{C})$ la réunion des rayons extrémaux de \mathcal{C} .

Remarque 3.4. Soit $\mathcal{B} := \{w_1, \dots, w_e\}$ une base de W . Munissons W du produit intérieur tel que la base \mathcal{B} est orthonormée et notons $\mathrm{O}(W)$ le groupe orthogonal par rapport à ce produit intérieur. Dans les coordonnées associées à \mathcal{B} , $\mathrm{GL}(W)$ s'identifie avec $\mathrm{GL}_e(\mathbb{R})$, et si l'on identifie $\mathbf{S}^2 W$ avec $\mathbf{N}^1(A^e)$ comme décrit dans la remarque 2.13, l'action de $g \in \mathrm{GL}(W)$ sur θ_1 ne dépend que de la première colonne de la matrice représentant g , de sorte que $\mathrm{GL}(W) \cdot \theta_1 = \mathbb{R}_+^* (\mathrm{O}(W) \cdot \theta_1)$.

Notation 3.5. Posons pour la suite

$$E_k = \{g_1 \theta_1 \cdots g_k \theta_1 \mid g_1, \dots, g_k \in \mathrm{GL}(W)\} \subset \mathbf{N}^k(A^e).$$

Pour α et $\beta \in \mathbf{N}^\bullet(A^e)$, on écrit $\alpha \sim \beta$, si α et β sont dans la même orbite sous l'action de $\mathrm{GL}(W)$.

Proposition 3.6. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n . Le cône $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ est fermé et l'on a l'inclusion*

$$\text{ext}(\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)) \subset E_k$$

qui est une égalité pour $k \in \{0, \dots, n\}$.

Démonstration. Posons $G = \text{GL}(W)$. Comme un cône fermé qui ne contient pas de droite est l'enveloppe convexe de ses rayons extrémaux, toute classe $\alpha \in \text{Psef}^1(A^e)$ s'écrit comme combinaison convexe des classes dans l'orbite $G \cdot \theta_1$ par la proposition 3.2. On a donc

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) = \text{cone}\{g_1 \theta_1 \cdots g_k \theta_1 \mid g_1, \dots, g_k \in G\}.$$

En particulier, $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A \times A)$ est le cône engendré par l'image de l'application continue (cf. remarque 3.4)

$$\begin{aligned} \varphi : \text{O}(W) \times \cdots \times \text{O}(W) &\rightarrow \mathbf{N}^k(A^e) \\ (g_1, \dots, g_k) &\mapsto g_1 \theta_1 \cdots g_k \theta_1, \end{aligned}$$

i.e., $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ est engendré par un ensemble compact et est donc fermé. Or, l'enveloppe convexe de l'image de φ est compacte de sorte que tout $x \in \text{conv}(\text{im}(\varphi))$ s'écrit comme combinaison convexe d'un nombre fini d'éléments de $\text{im}(\varphi)$. Comme, par la remarque 3.4,

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) = \text{cone}(\text{conv}(\text{im}(\varphi))) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}^+, x \in \text{conv}(\text{im}(\varphi))\},$$

on a

$$\text{ext}(\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)) \subset E_k.$$

Montrons maintenant

$$E_k \subset \text{ext}(\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e))$$

pour $1 \leq k \leq n$. On raisonne par récurrence sur k . Pour éviter des indices, on le démontre pour $e = 2$, le raisonnement pour le cas $e \geq 3$ étant similaire.

Supposons donc $e = 2$. Pour $k = 1$, c'est la proposition 3.2. Soit maintenant $k \geq 2$ et soit $g_1 \theta_1 \cdots g_k \theta_1 \in E_k$. Comme

$$g_1 \theta_1 \cdots g_k \theta_1 \sim \theta_1 \cdot g_1^{-1} g_2 \theta_1 \cdots g_1^{-1} g_k \theta_1 =: \alpha,$$

et comme $\text{ext}(\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A \times A))$ est invariant sous l'action de G , il suffit de montrer que α est extrémal. Ecrivons $\alpha = \sum_j s_j$ avec

$$s_j = g_1^j \theta_1 \cdots g_k^j \theta_1$$

et

$$g_i^j \theta_1 = (a_i^j)^2 \theta_1 + (b_i^j)^2 \theta_2 + a_i^j b_i^j \lambda.$$

Supposons qu'il existe un s_j tel que $b_i^j \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. Cela implique que s_j contient θ_2^k comme terme avec un coefficient strictement positif, ce qui n'est pas possible, car les coefficients de ce terme sont toujours ≥ 0 et α ne contient pas de tel terme. On peut donc supposer, pour tout j , $s_j = \theta_1 \cdot g_2^j \theta_1 \cdots g_k^j \theta_1$, i.e.,

$$\theta_1 \cdot (g_1^{-1} g_2 \theta_1 \cdots g_1^{-1} g_k \theta_1) = \sum_j \theta_1 \cdot (g_2^j \theta_1 \cdots g_k^j \theta_1).$$

Par le corollaire 2.9, on a, pour $1 \leq k \leq n$,

$$g_1^{-1} g_2 \theta_1 \cdots g_1^{-1} g_k \theta_1 = \sum_j g_2^j \theta_1 \cdots g_k^j \theta_1,$$

ce qui fournit le résultat par récurrence sur k : tous les $g_2^j \theta_1 \cdots g_k^j \theta_1$ doivent être proportionnels à $g_1^{-1} g_2 \theta_1 \cdots g_1^{-1} g_k \theta_1$, donc tous les s_j sont proportionnels à α . \square

Finissons par la proposition suivante qui nous servira dans la section 4.2.

Proposition 3.7. *Soit $g \in \mathrm{GL}(W)$, soit $1 \leq k \leq n-1$ et soit*

$$\begin{aligned}\varphi_g : \mathbf{N}^k(A^e) &\rightarrow \mathbf{N}^{k+1}(A^e) \\ \alpha &\mapsto g\theta_1 \cdot \alpha.\end{aligned}$$

Alors $\varphi_g^{-1}(\mathbf{S}^{k+1} \mathrm{Psef}^1(A^e)) = \mathbf{S}^k \mathrm{Psef}^1(A^e)$.

Démonstration. Il faut montrer que $g\theta_1 \cdot \alpha \in \mathbf{S}^{k+1} \mathrm{Psef}^1(A^e)$ implique que α est contenu dans $\mathbf{S}^k \mathrm{Psef}^1(A^e)$ (l'autre sens est clair). Par la stabilité de $\mathbf{S}^k \mathrm{Psef}^1(A^e)$ sous l'action de $\mathrm{GL}(W)$, il suffit de le montrer pour φ_{id} . Soit $\theta_1 \cdot \alpha \in \mathbf{S}^{k+1} \mathrm{Psef}^1(A^e)$. Par la proposition précédente, on peut alors écrire

$$\theta_1 \cdot \alpha = \sum_j g_1^j \theta_1 \cdots g_k^j \theta_1,$$

où la somme à droite contient un nombre fini de termes. Par l'argument utilisé dans la preuve de la proposition 3.6, on obtient

$$\theta_1 \cdot \alpha = \theta_1 \cdot \sum_j g_2^j \theta_1 \cdots g_k^j \theta_1.$$

Par le corollaire 2.9, on a donc

$$\alpha = \sum_j g_2^j \theta_1 \cdots g_k^j \theta_1 \in \mathbf{S}^k \mathrm{Psef}^1(A^e).$$

□

3.2 Le cône semipositif

Soit $A = U/\Gamma$ toujours une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n , où U est un espace vectoriel complexe et Γ un réseau dans U . Soit W un espace vectoriel réel de dimension e et écrivons $V^* \simeq U^* \otimes_{\mathbb{R}} W$. On note $V_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel engendré par les vecteurs v_{sr} , $1 \leq s \leq n, 1 \leq r \leq e$ (cf. (6)).

Dans ce chapitre, on étudie les cônes semipositifs $\mathrm{Semi}^k(A^e)$. Dans une première étape, on remarque qu'au lieu de regarder la positivité des formes hermitiennes H_{α} sur $\bigwedge^k V$ associées aux classes $\alpha \in \mathbf{N}^k(A^e)$, on peut étudier la positivité d'une forme bilinéaire symétrique B_{α} sur $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$. Pour k fixé, on montre qu'il existe une base telle que les matrices représentant les formes symétriques B_{α} se décomposent en blocs correspondant aux facteurs irréductibles de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ en tant que $\mathrm{GL}(W)$ -module (proposition 3.9). La démonstration de la proposition 3.9 fournira aussi une méthode pour calculer les matrices b_{α} représentant les formes symétriques B_{α} à partir des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(W)$ (remarque 3.10), ce qui nous permet de déduire que le cône $\mathrm{Semi}^k(A^e)$ ne dépend pas de la dimension de A pour $n \geq k$ (corollaire 3.11). Enfin, on montre que, pour $1 \leq k \leq n$, on a des isomorphismes

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^k(A \times A) &\simeq \mathrm{Sym}_{k+1}(\mathbb{R}), \\ \mathbf{N}^{2n-k}(A \times A) &\simeq \mathrm{Sym}_{k+1}(\mathbb{R}),\end{aligned}$$

qui associent à une classe semipositive une matrice symétrique positive (proposition 3.13).

On reprend les notations de la section 2.3. La base $\{w_1, \dots, w_e\}$ de W est dite la *base standard* de W et

$$\{v_{s_1 r_1} \wedge \cdots \wedge v_{s_k r_k} \mid 1 \leq s_i \leq n, 1 \leq r_i \leq e, i \in \{1, \dots, k\}\}$$

est dite la *base standard* de $\bigwedge^k V$ (cf. (6)). Le produit intérieur sur $\bigwedge^k V$ telle que la base standard est une base orthonormée est dit *produit intérieur standard*.

3.2.1 Décomposition des formes hermitiennes

Afin d'associer à une classe dans $N^k(A \times A)$ une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel, et pour étudier l'ensemble des formes ainsi obtenues, on a d'abord besoin d'un lemme technique.

Soit $\rho_k : \text{End}(W) \rightarrow \text{End}(\bigwedge^k V)$ la représentation induite par la représentation tautologique W et notons $\rho_k^{\mathcal{B}}(g)$ la matrice représentant $\rho_k(g)$ par rapport aux coordonnées standards sur W resp. sur $\bigwedge^k V$. Rappelons que l'on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \text{End}(W) &\rightarrow \text{End}(A) \otimes \mathbb{R} \\ g &\mapsto u_g \end{aligned}$$

et que, par construction, la représentation analytique de u_g est donnée par ρ_1 . Ayant de plus un isomorphisme $\phi : N^1(A^e) \rightarrow \text{End}^s(A^e) \otimes \mathbb{R}$, on peut identifier tout $\alpha \in N^1(A^e)$ avec un $g_\alpha \in \text{End}(W)$. Par [7, Lemme 2.4.5], on a

$$\rho_1^{\mathcal{B}}(g_\alpha) = h_\alpha^{\mathcal{B}}, \quad (11)$$

où l'on note $h_\alpha^{\mathcal{B}}$ la matrice représentant la forme hermitienne H_α associée à $\alpha \in N^1(A^e)$ par rapport aux coordonnées standards sur W resp. sur V .

Lemme 3.8. *Dans les coordonnées standards de W , resp. de $\bigwedge^k V$, on a*

$$\rho_k^{\mathcal{B}}(g_\alpha) = \frac{1}{k!} h_{\alpha^k}^{\mathcal{B}}$$

pour tout $\alpha \in N^1(A^e)$.

Démonstration. Rappelons que le produit extérieur d'une forme hermitienne sur V est définie par

$$\left(\bigwedge^k H \right) (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, w_1 \wedge \cdots \wedge w_k) = \det(H(v_i, w_j)_{1 \leq i, j \leq k})$$

pour $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ et $w_1 \wedge \cdots \wedge w_k$ dans $\bigwedge^k V$. Comme le produit d'intersection de deux classes dans $N^\bullet(A^e)$ correspond au produit extérieur des (k, k) -formes représentant les deux classes, on a $(\bigwedge^k H_\alpha) = \frac{1}{k!} H_{\alpha^k}$ et donc

$$\frac{1}{k!} h_{\alpha^k}^{\mathcal{B}} = \det((h_\alpha^{\mathcal{B}})_{1 \leq i, j \leq k}).$$

En même temps, $\rho_1(g_\alpha)$ induit naturellement un endomorphisme $\bigwedge^k \rho_1(g_\alpha)$ sur $\bigwedge^k V$ en posant $\bigwedge^k \rho_1(g_\alpha)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \rho_1(g_\alpha)v_1 \wedge \cdots \wedge \rho_1(g_\alpha)v_k$. Dans la base standard de $\bigwedge^k V$, on a

$$\bigwedge^k \rho_1^{\mathcal{B}}(g_\alpha) = \det(\rho_1^{\mathcal{B}}(g_\alpha)_{1 \leq i, j \leq k}).$$

Ayant $\rho_k^{\mathcal{B}}(g_\alpha) = \bigwedge^k \rho_1^{\mathcal{B}}(g_\alpha)$, on obtient le résultat souhaité par (11). \square

Remarquons que toutes les matrices $h_\alpha^{\mathcal{B}}$ sont réelles, de sorte que les matrices $h_{\alpha^k}^{\mathcal{B}}$ sont également réelles. Comme les α^k engendrent $N^k(A^e)$, on en déduit que, pour tout $\beta \in N^k(A^e)$, la matrice $h_\beta^{\mathcal{B}}$ est réelle. Cela nous permet d'identifier ces matrices avec une forme bilinéaire symétrique sur $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$. On obtient ainsi une application

$$\begin{aligned} B : N^k(A^e) &\rightarrow \mathbf{S}^2\left(\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}^*\right) \\ \alpha &\mapsto B_\alpha, \end{aligned}$$

qui associe à une classe semipositive une forme bilinéaire symétrique semipositive sur $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$.

La proposition suivante montre qu'il existe une base de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ telle que, pour tout $\alpha \in N^k(A^e)$, la matrice b_{α} représentant la forme bilinéaire B_{α} se décompose en blocs correspondant aux $GL(W)$ -modules irréductibles de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$.

Proposition 3.9. *Il existe une décomposition*

$$\bigwedge^k V_{\mathbb{R}} = \bigoplus_l M_l$$

en facteurs irréductibles telle que l'application $B : N^k(A^e) \rightarrow \mathbf{S}^2(\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}^*)$ se factorise par $\bigoplus_l \mathbf{S}^2(M_l^*)$.

Démonstration. Comme la base standard de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ est orthogonale par rapport au produit intérieur standard, il existe par l'astuce unitaire une transformation orthogonale $a : \bigwedge^k V_{\mathbb{R}} \rightarrow \bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ telle que la nouvelle base est adaptée à la décomposition $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}} = \bigoplus_l M_l$. Par la proposition 3.8, on a donc

$${}^t a \frac{1}{k!} b_{\beta^k} a = {}^t a \rho_k^{\mathcal{B}}(g_{\beta}) a = a^{-1} \rho_k^{\mathcal{B}}(g_{\beta}) a$$

pour tout $\beta \in N^1(A^e)$. Par construction, les matrices $a^{-1} \rho_k^{\mathcal{B}}(g_{\beta}) a$ se décomposent en blocs correspondant aux facteurs irréductibles de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$, et comme les β^k engendrent $N^k(A^e)$, on en déduit le résultat souhaité. \square

Remarque 3.10. La démonstration de la proposition 3.9 montre comment on peut calculer les matrices b_{α} représentant les formes B_{α} associées aux classes α dans $N^k(A^e)$: soit

$$\bigwedge^k V_{\mathbb{R}} = \bigoplus_l M_l \tag{12}$$

une décomposition en facteurs irréductibles orthogonaux deux à deux par rapport au produit intérieur standard sur $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$. Choisissons maintenant une base orthonormée de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ adoptée à cette décomposition. Si l'on note ρ_{M_l} la représentation $\text{End}(W) \rightarrow \text{End}(M_l)$, on a $\rho_k(g) = \bigoplus_l \rho_{M_l}(g)$ et par la proposition 3.8, on a $\rho_{M_l}(g_{\beta}) = \frac{1}{k!} b_{\beta^k}|_{M_l}$ pour tout $\beta \in N^1(A^e)$ dans les coordonnées choisies. Cela nous permet de calculer les matrices b_{α} pour $\alpha \in N^k(A^e)$ comme suit (on l'explique en détail pour $e = 2$, le cas général étant similaire) : on calcule d'abord les représentations $\rho_{M_l} : \text{End}(W) \rightarrow \text{End}(M_l)$ dans une base orthonormée de M_l par rapport au produit intérieur induit sur M_l en tant que sous-module de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$. Supposons que l'on obtient

$$\begin{aligned} \rho_{M_l} : \text{Mat}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \text{Mat}_{\dim(M_l)}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto (p_{ij}(a, b, c, d))_{ij}, \end{aligned}$$

où les p_{ij} sont des polynômes homogènes de degré k . Écrivons de plus

$$p_{ij}(a, b, c, d) = \sum_{|l|=k} t_{ij}^{(l)} a^{l_1} d^{l_2} b^{l_3}$$

avec $l = (l_1, l_2, l_3)$ et $t_{ij}^{(l)} \in \mathbb{R}$. On a d'autre part

$$(a\theta_1 + d\theta_2 + b\lambda)^k = \sum_{|l|=k} \binom{k}{l_1, l_2, l_3} a^{l_1} d^{l_2} b^{l_3} \theta_1^{l_1} \theta_2^{l_2} \lambda^{l_3}.$$

Si $\alpha \in N^k(A^e)$ est une classe représentée par le polynôme

$$\sum_{|l|=k} x_{l_1, l_2, l_3} \theta_1^{l_1} \theta_2^{l_2} \lambda^{l_3},$$

la matrice $b_\alpha|_{M_l}$ représentant $B_\alpha|_{M_l}$, est alors donnée par

$$\frac{1}{k!} b_\alpha|_{M_l} = \left(\sum_{|l|=k} t_{ij}^{(l)} \binom{k}{l_1, l_2, l_3}^{-1} x_{l_1, l_2, l_3} \right)_{ij}. \quad (13)$$

Remarquons enfin que si M_l et M'_l sont deux modules isomorphes dans la décomposition (12), il suffit de calculer $b_\alpha|_{M_l}$ pour étudier la positivité de α . Cela découle du fait que $b_\alpha|_{M'_l}$ doit être une matrice semblable à $b_\alpha|_{M_l}$, de sorte que les deux matrices ont les mêmes valeurs propres.

Corollaire 3.11. *Les cônes $\text{Semi}^k(A \times A)$ ne dépendent pas de la dimension de A pour $n \geq k$.*

Démonstration. Par la démonstration de la proposition 3.9 et la remarque 3.10, il suffit de montrer qu'un module irréductible apparaît dans la décomposition de $\bigwedge^k W^{\oplus n}$ si et seulement s'il apparaît dans la décomposition de $\bigwedge^k W^{\oplus k}$ pour $n \geq k$: notons l un multi-indice (l_1, \dots, l_k) et posons $|l| = \sum_{i=1}^k l_i$. On a

$$\bigwedge^k W^{\oplus k} = \bigoplus_{|l|=k} \left(\bigwedge^{l_1} W \otimes \dots \otimes \bigwedge^{l_k} W \right)^{\oplus m_l}$$

et

$$\bigwedge^k W^{\oplus n} = \bigoplus_{|l|=k} \left(\bigwedge^{l_1} W \otimes \dots \otimes \bigwedge^{l_k} W \right)^{\oplus \binom{n}{k} m_l},$$

où m_l est un entier positif, d'où le résultat. \square

3.2.2 Le cas $A \times A$

Regardons maintenant le cas $e = 2$. On montre d'abord que, pour $1 \leq k \leq n$, on a des isomorphismes $N^k(A \times A) \rightarrow \text{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$ (resp. $N^{2n-k}(A \times A) \rightarrow \text{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$) qui envoient des classes semipositives sur des matrices positives (proposition 3.13). Expliquons l'idée pour $n = k$: ayant $V_{\mathbb{R}} = W^{\oplus k}$, le $\text{GL}(W)$ -module $\mathbf{S}^k(W)$ est un facteur irréductible de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$. On choisit alors une base telle que les matrices b_α se décomposent en blocs correspondant aux facteurs irréductibles de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$. En prenant la projection sur le bloc correspondant à une copie de $\mathbf{S}^k W$, on obtient l'isomorphisme souhaité.

Ensuite, on applique la méthode décrite dans la remarque 3.10 afin de calculer l'isomorphisme $N^k(A \times A) \rightarrow \text{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$ explicitement (lemme 3.14) et pour obtenir des inéquations définissant les cônes semipositifs $\text{Semi}^k(A \times A)$ pour A de dimension 3 et pour $2 \leq k \leq 4$.

Commençons par un lemme technique.

Lemme 3.12. *Soit $\rho : \text{End}(W) \rightarrow \text{End}(\mathbf{S}^k W)$ la représentation standard et $\rho_{\mathcal{B}} : \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{k+1}(\mathbb{R})$ l'application induite pour des coordonnées sur W et $\mathbf{S}^k W$ fixées. L'espace vectoriel engendré par $\rho_{\mathcal{B}}(\text{Sym}_2(\mathbb{R}))$ est de dimension $\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \dim \mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W)$.*

Démonstration. On choisit une base $\{w_1, w_2\}$ de W et la base $\{w_1^i w_2^{k-i} \mid 0 \leq i \leq k\}$ de $\mathbf{S}^k W$. Soit D la matrice diagonale avec $D_{ii} = \binom{n}{i}$ pour $0 \leq i \leq k$. Comme D est inversible, il suffit de montrer que l'espace engendré par les matrices $\rho_{\mathcal{B}}(\text{Sym}_2(\mathbb{R}))D$ est de dimension $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Pour cela, on procède comme suit. D'abord on identifie $\text{Sym}_2(\mathbb{R})$ avec $\mathbf{S}^2 W$ par l'application

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto aw_1^2 + bw_1w_2 + cw_2^2.$$

Alors on a $(aw_1^2 + bw_1w_2 + cw_2^2)^k \in \mathbf{S}^k(\mathbf{S}^2 W)$. Soit $\phi : \mathbf{S}^k(\mathbf{S}^2 W) \simeq \mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W)$ l'isomorphisme donné par la réciprocité d'Hermite (cf. par exemple [12, Lemma 3]). Comme les $(aw_1^2 + bw_1w_2 + cw_2^2)^k$ engendrent $\mathbf{S}^k(\mathbf{S}^2 W)$, les $\phi((aw_1^2 + bw_1w_2 + cw_2^2)^k)$ engendrent $\mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W)$, de sorte qu'il suffit de montrer que l'on a

$$\forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \text{Sym}_2(\mathbb{R}) \quad \phi((aw_1^2 + bw_1w_2 + cw_2^2)^k) = \rho_{\mathcal{B}}(g)D, \quad (14)$$

où l'on identifie $\mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W)$ avec $\text{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$ (voir ci-dessous pour les détails).

Pour montrer l'égalité (14), on rappelle d'abord que l'isomorphisme ϕ est donné par

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{S}^k(\mathbf{S}^2 W) &\rightarrow \mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W) \hookrightarrow \mathbf{S}^k W \otimes \mathbf{S}^k W, \\ (w_1^2)^{r_1}(w_1w_2)^{r_2}(w_2^2)^{r_3} &\mapsto (w_1 \otimes w_1)^{*r_1} * (w_1 \otimes w_2 + w_2 \otimes w_1)^{*r_2} * (w_2 \otimes w_2)^{*r_3}, \end{aligned}$$

où $(u_1 \otimes u_2) * (v_1 \otimes v_2) = (u_1v_1 \otimes u_2v_2) \in \mathbf{S}^2 W \otimes \mathbf{S}^2 W$ pour $u_1, u_2, v_1, v_2 \in W$. Un calcul montre alors que l'image de $(aw_1^2 + bw_1w_2 + cw_2^2)^k$ par ϕ est

$$\sum_{r_1+r_2+r_3=k} \binom{k}{r_1, r_2, r_3} a^{r_1} b^{r_2} c^{r_3} \sum_{s=0}^{r_2} \binom{r_2}{s} w_1^{r_1+r_2-s} w_2^{s+r_3} \cdot w_1^{r_1+s} w_2^{r_2-s+r_3}. \quad (15)$$

Calculons maintenant $\rho_{\mathcal{B}}(g)D$. Pour $0 \leq j \leq k$, on a

$$\begin{aligned} g \cdot w_1^j w_2^{k-j} &= (aw_1 + bw_2)^j (bw_1 + dw_2)^{k-j} \\ &= \sum_{i=0}^k \left(\sum_{l=0}^i \binom{j}{i-l} \binom{k-j}{l} a^{i-l} b^{j-i+2l} c^{k-j-l} \right) w_1^i w_2^{k-i}, \end{aligned}$$

et ayant $\binom{j}{i-l} \binom{k-j}{l} = \binom{k}{i-l, j-i+2l, k-j-l} \binom{j-i+2l}{l} \binom{k}{j}^{-1}$, on obtient ainsi

$$(\rho_{\mathcal{B}}(g)D)_{ij} = \sum_{l=0}^i \binom{k}{i-l, j-i+2l, k-j-l} \binom{j-i+2l}{l} a^{i-l} b^{j-i+2l} c^{k-j-l}, \quad (16)$$

et l'on vérifie facilement que cette matrice est symétrique. Cela nous permet de voir $\eta(g) := \rho_{\mathcal{B}}(g)D$ comme un élément dans $\mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W)$ via l'isomorphisme $\mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W) \simeq \text{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$ qui envoie $\eta(g)$ sur $\sum_{0 \leq i \leq j \leq k} \eta(g)_{ij} w_1^i w_2^{k-i} \cdot w_1^j w_2^{k-j}$. En posant $r_1 = i-l, r_2 = j-i+2l, r_3 = k-j-l$ pour i, j, l fixés, le terme associé de la somme donnant $\eta(g)_{ij}$ s'écrit

$$\binom{k}{r_1, r_2, r_3} \binom{r_2}{l} a^{r_1} b^{r_2} c^{r_3},$$

et l'on a

$$\begin{aligned} i &= r_1 + r_2 - l, & k-i &= l + r_3, \\ j &= r_1 + l, & k-j &= r_2 - l + r_3, \end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat souhaité en comparant avec (15). \square

Étudions maintenant la décomposition de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ en $\mathrm{GL}(W)$ -modules irréductibles. Comme on a $V_{\mathbb{R}} \simeq W^{\oplus n}$ en tant que $\mathrm{GL}(W)$ -modules, on remplace $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ par $\bigwedge^k W^{\oplus n}$ dans la suite. Or

$$\begin{aligned} \bigwedge^k W^{\oplus n} &= \bigoplus_{s=\max\{0, k-n\}}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (\det(W)^{\otimes s} \otimes W^{\otimes k-2s})^{\binom{n}{k-2s} \binom{2s}{s}} \\ &= \bigoplus_{s=\max\{0, k-n\}}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left(\bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{k-2s}{2} \rfloor} \det(W)^{\otimes i+s} \otimes \mathbf{S}^{k-2s-2i} W \right)^{\binom{n}{k-2s} \binom{2s}{s}}. \end{aligned}$$

Posons $M_{k,l} = \det(W)^{\otimes l} \otimes \mathbf{S}^{k-2l} W$ pour $0 \leq l \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ et notons $m_{k,l}$ la multiplicité de $M_{k,l}$ dans la décomposition de $\bigwedge^k W^{\oplus n}$. Soit

$$p_l : \bigoplus_l \mathbf{S}^2(M_{k,l}^*)^{\oplus m_{k,l}} \rightarrow \mathbf{S}^2(M_{k,l}^*)$$

une projection sur une des copies de $\mathbf{S}^2(M_{k,l}^*)$.

La proposition suivante fournit alors les isomorphismes $N^k(A \times A) \simeq \mathrm{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$ (resp. $N^{2n-k}(A \times A) \rightarrow \mathrm{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$) qui envoient les classes semipositives sur des matrices semipositives pour $1 \leq k \leq n$ (après un choix de coordonnées sur $\mathbf{S}^k W^*$ (resp. sur $\mathbf{S}^k W^* \otimes \det(W^*)^{\otimes n-k}$)).

Proposition 3.13. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n et soit $0 \leq k \leq 2n$. Alors les $\mathrm{GL}(W)$ -morphisms*

$$p_l \circ B : N^k(A \times A) \rightarrow \mathbf{S}^2(M_{k,l}^*)$$

sont surjectifs pour tout l . En particulier, pour $1 \leq k \leq n$, les applications

$$p_0 \circ B : N^k(A \times A) \rightarrow \mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W^*)$$

resp.

$$p_{n-k} \circ B : N^{2n-k}(A \times A) \rightarrow \mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W^* \otimes \det(W^*)^{\otimes n-k})$$

sont des isomorphismes de $\mathrm{GL}(W)$ -modules qui envoient toute classe semipositive sur une forme bilinéaire symétrique semipositive.

Démonstration. Rappelons que l'on a un isomorphisme $N^1(A^e) \simeq \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$, et que l'on note g_β la matrice symétrique ainsi associée à $\beta \in N^1(A^e)$. Soit $\rho_{M_{k,l}} : \mathrm{End}(W) \rightarrow \mathrm{End}(M_{k,l})$ la représentation standard et

$$\rho_{M_{k,l}}^{\mathcal{B}} : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Mat}_{\dim(M_{k,l})}(\mathbb{R})$$

l'application induit pour des coordonnées de W et $M_{k,l}$ fixées. Par la démonstration de la proposition 3.9 resp. par la remarque 3.10, on peut supposer que les coordonnées sont choisies de façon que $p_l \circ B_{\beta^k} = \rho_{M_{k,l}}^{\mathcal{B}}(g_\beta)$ pour tout $\beta \in N^1(A \times A)$. Comme les β^k engendrent $N^k(A^e)$, l'application $p_l \circ h$ est donc surjective si et seulement si les matrices

$$\rho_{M_{k,l}}^{\mathcal{B}}(g_\beta) = \det(g_\beta)^{2l} \cdot \rho_{M_{k,l}}^{\mathcal{B}}(g_\beta)$$

engendrent un espace vectoriel de dimension $\frac{(k-2l+1)(k-2l)}{2}$. Or les applications $\rho_{M_{k,l}}^{\mathcal{B}}$ sont polynomiales et l'ensemble $U := \{\beta \mid \det(\beta) \neq 0\}$ est un ouvert dans $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$, de sorte que

$$\langle \rho_{M_{k,l}}^{\mathcal{B}}(U) \rangle = \langle \rho_{M_{k-2l,0}}^{\mathcal{B}}(U) \rangle.$$

Il suffit ainsi de montrer que $\rho_{M_{k,0}}^{\mathcal{B}}(U)$ engendre un espace vectoriel de dimension $\frac{(k+2)(k+1)}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui est la conclusion du lemme 3.12. \square

Soit $\rho : \text{End}(W) \rightarrow \text{End}(\mathbf{S}^k W)$ la représentation standard et $\rho_{\mathcal{B}} : \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{k+1}(\mathbb{R})$ l'application induite pour des coordonnées associées à une base $\{w_1, w_2\}$ de W et la base $\{w_1^i w_2^{k-i} \mid 0 \leq i \leq k\}$ de $\mathbf{S}^k W$. Soit $D \in \text{Mat}_{k+1}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale telle que $D_{ii} = \binom{n}{i}$ pour $0 \leq i \leq k$. Par la démonstration du lemme 3.12, on sait que les matrices $\rho_{\mathcal{B}}(g)D$ sont symétriques, de sorte que l'on obtient un isomorphisme $b' : \mathbf{N}^k(A \times A) \rightarrow \text{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$ induit par la condition $\beta^k \mapsto \rho_{\mathcal{B}}(g_{\beta})D$ pour tout $\beta \in \mathbf{N}^1(A \times A)$ (cf. lemme 3.8).

Lemme 3.14. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n . Soit $1 \leq k \leq n$ et soit $\alpha \in \mathbf{N}^k(A \times A)$. Avec les notations ci-dessus, b'_{α} représente $p_0 \circ B_{\alpha} = B_{\alpha}|_{\mathbf{S}^k W}$ pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^k(A \times A)$ et l'on a*

$$b'_{\theta_1 \cdot \alpha} = \left(\begin{array}{c|c} b'_{\alpha} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

pour $1 \leq k \leq n-1$.

Démonstration. On a un plongement canonique

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{S}^k W &\rightarrow W^{\otimes k} \\ v_1 \cdots v_k &\mapsto \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}. \end{aligned}$$

Comme chaque tenseur dans $\varphi(v_1^i v_2^{k-i})$ apparaît $i!(k-i)!$ fois, et comme on a $\binom{k}{i}$ tenseurs, les vecteurs

$$\frac{1}{i!(k-i)!\sqrt{\binom{k}{i}}} \varphi(v_1^i v_2^{k-i}), \quad 0 \leq i \leq k,$$

forment une base orthonormée de $\mathbf{S}^k W$ comme sous-module de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ par rapport au produit intérieur standard. Soit $a : \mathbf{S}^k W \rightarrow \mathbf{S}^k W$ le changement de base donné par la matrice

$$a_{ij} = \begin{cases} c_0 i!(k-i)!\sqrt{\binom{k}{i}} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $c_0 \in \mathbb{R}$. La matrice $\rho_{\mathcal{B}'}(g)$ représentant $\rho(g)$ dans la nouvelle base \mathcal{B}' est alors donnée par $\rho_{\mathcal{B}'}(g) = a\rho_{\mathcal{B}}(g)a^{-1}$. La matrice $\rho_{\mathcal{B}'}(g)$ ne dépend pas de la constante c_0 de sorte que $\rho_{\mathcal{B}'}(g)$ est la matrice représentant $\rho(g)$ dans une base orthonormée de $\mathbf{S}^k W$. En particulier, on a

$$a\rho_{\mathcal{B}}(g_{\beta})a^{-1} = \rho_{\mathcal{B}'}(g_{\beta}) = b_{\beta^k}|_{\mathbf{S}^k W}$$

pour tout $\beta \in \mathbf{N}^1(A \times A)$ et donc $\rho_{\mathcal{B}}(g_{\beta}) = a^{-1}b_{\beta^k}|_{\mathbf{S}^k W}a$. Si l'on prend $c_0 = \frac{1}{k!}$, on obtient ainsi

$$\rho_{\mathcal{B}}(g_{\beta})D = {}^t(a^{-1})b_{\beta^k}|_{\mathbf{S}^k W}a^{-1},$$

ce qui fournit la première partie de l'énoncé. Posons

$$b'_{\alpha} = {}^t(a^{-1})b_{\alpha}|_{\mathbf{S}^k W}a^{-1}$$

et notons $(b'_{\alpha})_{ij}$ le coefficient correspondant aux coordonnées i, j dans la matrice b'_{α} pour $0 \leq i, j \leq k$. On peut calculer ces matrices en calculant les b'_{β^k} et en appliquant ensuite la méthode décrite dans la remarque 3.10. De (16) on obtient ainsi

$$(b'_{\theta_1 \cdot \alpha})_{ij} = \sum_{\substack{0 \leq l \leq k-i \\ j-i \leq l \leq j}} \binom{i-j+2l}{l} x_{k-i-l, j-l, i-j+2l} (\theta_1 \cdot \alpha)$$

pour $0 \leq i, j \leq k$ et

$$(b'_\alpha)_{ij} = \sum_{\substack{0 \leq l \leq k-i \\ j-i \leq l \leq j}} \binom{i-j+2l}{l} x_{k-1-i-l, j-l, i-j+2l}(\alpha)$$

pour $0 \leq i, j \leq k-1$. Or, on a

$$x_{k-l-i-1, j-l, i-j+2l}(\alpha) = x_{k-i-l, j-l, i-j+2l}(\theta_1 \cdot \alpha)$$

pour $0 \leq l \leq k-i-1$,

$$x_{0, j-k+i, 2k-i-j}(\theta_1 \cdot \alpha) = 0$$

et

$$(b'_{\theta_1 \cdot \alpha})_{ik} = (b'_{\theta_1 \cdot \alpha})_{ki} = 0,$$

ce qui fournit le résultat souhaité. \square

En suivant la procédure décrite dans la remarque 3.10, on calcule maintenant des représentations des cônes $\text{Semi}^k(A \times A)$ pour $k = 2, 3, 4$ pour une variété abélienne A principalement polarisée très générale de dimension 3. On l'explique en détail pour $k = 2$.

1. **Le cas $k = 2$.** Remarquons d'abord que l'on a

$$\bigwedge^2 W^{\oplus 3} = (\mathbf{S}^2 W)^{\oplus 3} \oplus \det(W)^{\oplus 6}.$$

Fixons des coordonnées sur W telles que l'action de $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur $\mathbf{S}^2 W$ et $\det(W)$ soit donnée par

$$\rho_{\det(W)}(g) = ad - bc \quad \rho_{\mathbf{S}^2 W}(g) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ac & ad + bc & 2bd \\ c^2 & cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$(a\theta_1 + d\theta_2 + b\lambda)^2 = a^2\theta_1 + d^2\theta_2 + b^2\lambda^2 + 2ad\theta_1\theta_2 + 2ab\theta_1\lambda + 2db\theta_2\lambda$$

et $g_{a\theta_1 + d\theta_2 + b\lambda} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. Par le lemme 3.8, la matrice représentant la forme bilinéaire symétrique $B_{(a\theta_1 + d\theta_2 + b\lambda)^2}$ est donc semblable à une matrice diagonale par blocs composée de 6 blocs de la forme $ad - b^2$ et 3 blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ab & ad + b^2 & 2bd \\ b^2 & bd & d^2 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, pour

$$\alpha = x_{2,0,0}\theta_1^2 + x_{1,1,0}\theta_1\theta_2 + x_{0,2,0}\theta_2^2 + x_{1,0,1}\theta_1\lambda + x_{0,1,1}\theta_2\lambda + x_{0,0,2}\lambda^2 \in \mathbf{N}^2(A \times A),$$

une matrice représentant B_α est semblable à une matrice diagonale par blocs composée de 6 blocs de la forme

$$\frac{1}{2}x_{1,1,0} - x_{0,0,2} \tag{17}$$

et 3 blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} x_{2,0,0} & \frac{1}{2}x_{1,0,1} & x_{0,0,2} \\ x_{1,0,1} & \frac{1}{2}x_{1,1,0} + x_{0,0,2} & x_{0,1,1} \\ x_{0,0,2} & \frac{1}{2}x_{0,1,1} & x_{0,2,0} \end{pmatrix},$$

ce qui permet de déduire des inéquations définissant $\text{Semi}^2(A \times A)$.

Pour obtenir une matrice diagonale par blocs représentant B_α , il suffit par le lemme 3.14 de remplacer la matrice $\rho_{\mathbf{S}^2 W}(g)$ par la matrice $\rho_{\mathbf{S}^2 W}(g)D$ (où D est la matrice diagonale avec $D_{ii} = \binom{2}{i}$ pour $i = 0, 1, 2$) dans le raisonnement ci-dessus. Une matrice b_α représentant B_α est alors donnée par une matrice diagonale par blocs composée de 6 blocs de la forme (17) et 3 blocs de la forme

$$b_\alpha|_{\mathbf{S}^2 W} = \begin{pmatrix} x_{2,0,0} & x_{1,0,1} & x_{0,0,2} \\ x_{1,0,1} & x_{1,1,0} + 2x_{0,0,2} & x_{0,1,1} \\ x_{0,0,2} & x_{0,1,1} & x_{0,2,0} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

et la classe α est semipositive si et seulement si les matrices (17) et (18) sont semipositives. On retrouve ainsi la représentation du cône $\text{Semi}^2(A \times A)$ déjà obtenue dans [9] par un calcul explicite.

2. Le cas $k = 3$. Ayant

$$\bigwedge^3 W^{\oplus 3} \simeq (\det(W) \otimes W)^{\oplus 8} \oplus \mathbf{S}^3 W,$$

la classe

$$\alpha = \sum_{|l|=3} x_l \theta_1^{l_1} \theta_2^{l_2} \lambda^{l_3} \in \mathbf{N}^3(A \times A) = \mathbf{S}^3 \mathbf{N}^1(A \times A)$$

est semipositive si et seulement si les matrices

$$b_\alpha|_{\det(W) \otimes W} = \begin{pmatrix} 2x_{2,1,0} - 2x_{1,0,2} & x_{1,1,1} - 6x_{0,0,3} \\ x_{1,1,1} - 6x_{0,0,3} & 2x_{1,2,0} - 2x_{0,1,2} \end{pmatrix} \quad (19)$$

et

$$b_\alpha|_{\mathbf{S}^3 W} = \begin{pmatrix} x_{3,0,0} & x_{2,0,1} & x_{1,0,2} & x_{0,0,3} \\ x_{2,0,1} & x_{2,1,0} + 2x_{1,0,2} & x_{1,1,1} + 3x_{0,0,3} & x_{0,1,2} \\ x_{1,0,2} & x_{1,1,1} + 3x_{0,0,3} & x_{1,2,0} + 2x_{0,1,2} & x_{0,2,1} \\ x_{0,0,3} & x_{0,1,2} & x_{0,2,1} & x_{0,3,0} \end{pmatrix} \quad (20)$$

sont semipositives.

3. Le cas $k = 4$.

Comme les seuls facteurs irréductibles de $\bigwedge^4 W^{\oplus 3}$ sont $\det(W)^{\otimes 2}$ et $\det(W) \otimes \mathbf{S}^2 W$, un polynôme

$$P(\theta_1, \theta_2, \lambda) = \sum_{|l|=4} x_l \theta_1^{l_1} \theta_2^{l_2} \lambda^{l_3} \in \mathbf{S}^4 \mathbf{N}^1(A \times A)$$

représente une classe semipositive $\alpha \in \mathbf{N}^4(A \times A)$ si et seulement si les matrices

$$b_\alpha|_{\det(W)^{\otimes 2}} = x_{2,2,0} - x_{1,1,2} + 6x_{0,0,4} \quad (21)$$

et

$$b_\alpha|_{\det(W) \otimes \mathbf{S}^2 W} = \begin{pmatrix} 3x_{3,1,0} - 2x_{2,0,2} & 2x_{2,1,1} - 6x_{1,0,3} & x_{1,1,2} - 12x_{0,0,4} \\ 2x_{2,1,1} - 6x_{1,0,3} & 4x_{2,2,0} - 24x_{0,0,4} & 2x_{1,2,1} - 6x_{0,1,3} \\ x_{1,1,2} - 12x_{0,0,4} & 2x_{1,2,1} - 6x_{0,1,3} & 3x_{1,3,0} - 2x_{0,2,2} \end{pmatrix} \quad (22)$$

sont semipositives.

Remarque 3.15. Pour $k = 2$ (resp. pour $k = 3$), on obtient ainsi aussi une représentation du cône $\text{Semi}^2(A \times A)$ (resp. de $\text{Semi}^3(A \times A)$) pour une variété abélienne principalement polarisée très générale A de dimension ≥ 2 (resp. pour A de dimension ≥ 3) par le corollaire 3.11.

4 Comparaison des cônes

Pour la suite, on suppose toujours que A est une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n .

4.1 Classes pseudoeffectives et classes semipositives

Dans cette section, on étudie les inclusions de cônes

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) \subset \text{Psef}^k(A^e) \subset \text{Strong}^k(A^e) \subset \text{Semi}^k(A^e) \quad (23)$$

en se servant des caractérisations explicites des cônes $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ (en fonction de générateurs) et $\text{Semi}^k(A^e)$ (en fonction d'inéquations le définissant). Le résultat principal est, qu'en codimension $3 \leq k \leq n$ et pour $e \geq 2$, on a (théorème 4.4)

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) \subsetneq \text{Semi}^k(A^e).$$

Par ailleurs, on montre que les inclusions (23) sont des égalités pour $n = 3$ et $k = 4$ (proposition 4.5).

Lemme 4.1. *Soit $1 \leq l \leq e$ et soit $\alpha \in \mathbf{N}^k(A^l)$. Si $p : A^e \rightarrow A^l$ est une projection,*

1. *pour $1 \leq k \leq ln$, la classe $p^*\alpha$ est semipositive si et seulement si α est semipositive,*
2. *pour $1 \leq k \leq n$, la classe $p^*\alpha$ est dans le cône $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ si et seulement si $\alpha \in \mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^l)$.*

Démonstration. La projection $p : A^e \rightarrow A^l$ correspond à une projection $\tilde{p} : U^{\oplus e} \rightarrow U^{\oplus l}$ qui induit naturellement une application $\tilde{p}_k : \bigwedge^k U^{\oplus e} \rightarrow \bigwedge^k U^{\oplus l}$. Avec ces notations, on a $H_{\tilde{p}_k^* \alpha} = \tilde{p}_k^* H_\alpha$, et comme \tilde{p}_k est surjectif, $\tilde{p}_k^* H_\alpha$ est semipositive si et seulement si H_α est semipositive, ce qui montre la première partie de l'énoncé.

Montrons la deuxième partie du lemme. On peut supposer que p est la projection sur les l premiers facteurs de A^e . Si $\alpha \in \mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A \times A)$, il est clair que l'on a aussi $p^*\alpha \in \mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$. Supposons donc $p^*\alpha \in \mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$, i.e., on peut écrire

$$p^*\alpha = \sum_{j=1}^l g_1^j \theta_1 \cdots g_k^j \theta_1$$

avec $g_i^j \in \text{GL}(W)$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq l$. Ecrivons $g_i^j \theta_1 = \sum_{r=1}^e (a_r^{i,j})^2 \theta_r + \sum_{1 \leq s < t \leq e} a_s^{i,j} a_t^{i,j} \lambda_{st}$, où $a_r^{i,j} \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq r \leq e$. Comme $p^*\alpha$ est un polynôme en θ_r, λ_{st} , $1 \leq r \leq l$, $1 \leq s < t \leq l$, on a $a_r^{i,j} = 0$ pour $r \geq l$ et tout i, j . Cela entraîne $\alpha \in \mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ et donc le résultat souhaité. \square

Lemme 4.2. *Soit B une variété abélienne. Alors on a les inclusions suivantes :*

- (a) $\text{Semi}^k(B) \cdot \text{Semi}^l(B) \subset \text{Semi}^{k+l}(B)$,
- (b) $\text{Strong}^k(B) \cdot \text{Strong}^l(B) \subset \text{Strong}^{k+l}(B)$,
- (c) $\text{Nef}^k(B) \cdot \text{Psef}^l(B) \subset \text{Nef}^{k+l}(B)$.

Démonstration. Cela découle de la définition des notions de positivité respectives. \square

Rappelons quelques propriétés élémentaires du cône $\text{Sym}_k^+(\mathbb{R})$ des matrices $k \times k$ réelles symétriques positives [2, II.12].

Proposition 4.3. *Soit $\text{Sym}_k^+(\mathbb{R})$ le cône des matrices $k \times k$ réelles symétriques positives. Alors on a*

1. $\text{ext}(\text{Sym}_k^+(\mathbb{R})) = \{M \in \text{Sym}_k^+(\mathbb{R}) \mid \text{rang}(M) = 1\}$.
2. *Pour toute matrice A de rang $r < k$, il existe une (unique) face F de $\text{Sym}_k^+(\mathbb{R})$ telle que A est dans l'intérieur relatif de F . De plus, il existe une isométrie $F \simeq \text{Sym}_r^+(\mathbb{R})$ préservant le rang des matrices dans F .*

Théorème 4.4. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension $n \geq 3$. Alors on a*

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) \subsetneq \text{Semi}^k(A^e) \quad (24)$$

pour $3 \leq k \leq n$ et pour $e \geq 2$. Sous les mêmes restrictions sur k et n , on a de plus

$$\text{ext}(\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A \times A)) \subset \text{ext}(\text{Semi}^k(A \times A)). \quad (25)$$

Démonstration. Montrons d'abord (24) pour $e = 2$. Soit

$$\alpha = \theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2 + \lambda^2.$$

Par la représentation explicite du cône $\text{Semi}^2(A \times A)$ donnée dans (17) et (18), cette classe n'est pas semipositive, et ayant $\mathbf{S}^2 \text{Psef}^1(A \times A) = \text{Semi}^2(A \times A)$ (cf. [9, Thm. 4.1]), cela veut dire qu'elle n'est pas contenue dans $\mathbf{S}^2 \text{Psef}^1(A \times A)$. Par la proposition 3.7, on a donc

$$\theta_1^{n-2} \cdot \alpha \notin \mathbf{S}^n \text{Psef}^1(A \times A)$$

alors que l'on a par la représentation explicite du cône $\text{Semi}^3(A \times A)$ donnée dans (19) et (20), et par le lemme 4.2,

$$\theta_1^{n-2} \cdot \alpha \in \text{Semi}^n(A \times A),$$

ce qui montre (24) pour $e = 2$. On en déduit (24) pour le cas général $e \geq 3$ en tirant en arrière les cônes respectivement par des projections et en appliquant le lemme 4.1.

Afin de montrer (25), on rappelle d'abord que la réunion des rayons extrémaux de $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A \times A)$ est donnée par (proposition 3.6)

$$E_k = \{g_1\theta_1 \cdots g_k\theta_1 \mid g_1, \dots, g_k \in \text{GL}(W)\} \subset \mathbf{N}^k(A \times A).$$

Par l'isomorphisme décrit dans le lemme 3.14 et par la proposition 4.3, il suffit de montrer que la matrice b'_α (comme définie dans le lemme 3.14) est de rang 1 pour tout $\alpha \in E_k$. Pour $k = 1$, c'est la proposition 3.2 de sorte que l'on peut supposer $k \geq 2$. Comme E_k est invariant sous l'action de $\text{GL}(W)$, on peut supposer $\alpha = \theta_1 \cdot g_2\theta_1 \cdots g_k\theta_1$. Par récurrence, on a $\text{rang}(b'_{g_2\theta_1 \cdots g_k\theta_1}) = 1$ et par le lemme 3.14, cela fournit $\text{rang}(b'_\alpha) = 1$, d'où le résultat. \square

Par [9], on sait que l'on a $\mathbf{S}^{2n-2}(A \times A) = \text{Strong}^{2n-2}(A \times A)$. La proposition suivante complète ce résultat pour $n = 3$ et elle fournit ainsi des inéquations définissant $\text{Psef}^4(A \times A)$ dans ce cas.

Proposition 4.5. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension 3. Alors on a*

$$\mathbf{S}^4 \text{Psef}^1 = \text{Psef}^4(A \times A) = \text{Strong}^4(A \times A) = \text{Semi}^4(A \times A).$$

Démonstration. Posons

$$L_{\geq 0} = \{\alpha \in \mathbf{N}^4(A \times A) \mid x_{2,2,0} - x_{1,1,2} + 6x_{0,0,4} \geq 0\}$$

et

$$L = \{\alpha \in \mathbf{N}^4(A \times A) \mid x_{2,2,0} - x_{1,1,2} + 6x_{0,0,4} = 0\}.$$

On montre $\mathbf{S}^4 \text{Psef}^1(A \times A) = \text{Semi}^4(A \times A)$. Par la représentation explicite du cône $\text{Semi}^4(A \times A)$ donnée dans (21) et (22), ce cône est isomorphe à l'intersection du cône $\text{Sym}_3^+(\mathbb{R})$ avec le demi-espace $L_{\geq 0}$. Il en découle qu'une classe semipositive α dans $\mathbf{N}^4(A \times A)$ est extrémale dans $\text{Semi}^4(A \times A)$ si et seulement si α est semipositive et la matrice $b'_\alpha := b_\alpha|_{\det(W) \otimes \mathbf{S}^2 W}$ est de rang 1 : si b'_α est de rang 1, il est clair que α est une classe extrémale par la proposition 4.3. Inversement, supposons maintenant $\text{rang}(b'_\alpha) \neq 1$. Si $\text{rang}(b'_\alpha) = 2$, la matrice b'_α appartient à l'intérieur relative d'une face F de $\text{Sym}_3^+(\mathbb{R})$ qui est isomorphe à $\text{Sym}_2^+(\mathbb{R})$ (cf. proposition 4.3). On voit tout de suite que b'_α ne peut pas être extrémale dans $F \cap L_{\geq 0}$ et donc pas dans $\text{Semi}^4(A \times A)$. Si la matrice b'_α est de rang 3, elle est dans l'intérieur du cône $\text{Sym}_3^+(\mathbb{R})$. Il existe donc un voisinage U dans l'intérieur de $\text{Sym}_3^+(\mathbb{R})$ contenant b'_α . Il s'ensuit que l'on peut écrire $b'_\alpha = M_1 + M_2$ avec $M_1, M_2 \in \text{Sym}_3^+(\mathbb{R}) \cap L_{\geq 0} \cap U$ et $M_1 \neq M_2$, de sorte que b'_α n'est pas extrémale.

Il suffit ainsi de montrer que toute matrice de rang 1 contenue dans $\text{Sym}_3^+(\mathbb{R}) \cap L_{\geq 0}$ représente une classe dans $\mathbf{S}^4 \text{Psef}^1(A \times A)$. On montre qu'une matrice de rang 1 est représentée soit par une classe $g(\theta_1^2 \theta_2^2)$ soit par $g(\theta_1^3 \theta_2)$ pour un $g \in \text{GL}(W)$. Remarquons qu'une matrice symétrique de rang 1 est entièrement déterminée par sa première colonne si celle-ci est non nulle.

Montrons d'abord que toute matrice b'_α de rang 1 dans $\text{Sym}_3^+(\mathbb{R}) \cap L_{>0}$ correspond à une classe $g(\theta_1^2 \theta_2^2)$. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Supposons d'abord $c = d = 1$ et regardons

$$g(\theta_1^2 \theta_2^2) = (\theta_1 + a^2 \theta_2 + a\lambda)^2 (\theta_1 + b^2 \theta_2 + b\lambda)^2.$$

La matrice b'_α représente donc une telle classe $g(\theta_1^2 \theta_2^2)$ si et seulement si les équations suivantes, que l'on obtient comme conditions sur la première colonne, sont satisfaites :

$$\begin{aligned} 3x_{3,1,0} - 2x_{2,0,2} &= 4(a-b)^2, \\ 2x_{2,1,1} - 6x_{1,0,3} &= 4(a-b)^2(a+b), \\ x_{1,1,2} - 12x_{0,0,4} &= 4(a-b)^2 ab. \end{aligned}$$

Comme $a \neq b$, on est ramené aux équations

$$\begin{aligned} 3x_{3,1,0} - 2x_{2,0,2} &= 1, \\ 2x_{2,1,1} - 6x_{1,0,3} &= a+b, \\ x_{1,1,2} - 12x_{0,0,4} &= ab. \end{aligned}$$

Autrement dit, la matrice b'_α représente une classe $g(\theta_1^2 \theta_2^2)$ si et seulement si ce système admet une solution réelle. C'est équivalent à dire que le polynôme

$$P(y) = (x_{1,1,2} - 12x_{0,0,4}) - (2x_{2,1,1} - 6x_{1,0,3})y + y^2 \quad (26)$$

admet deux racines réelles distinctes (car $a \neq b$). Comme la matrice est de rang 1, on a

$$(2x_{2,1,1} - 6x_{1,0,3})^2 = 4x_{2,2,0} - 24x_{0,0,4}$$

et le discriminant de P vaut

$$\Delta(P) = x_{2,2,0} - x_{1,1,2} + 6x_{0,0,4}.$$

Ainsi on voit que toute matrice de rang 1 avec $3x_{3,1,0} - 2x_{2,0,2} \neq 0$, qui est dans $L_{>0}$, est aussi dans $\mathbf{S}^4 \text{Psef}^1(A \times A)$. De la même façon, on montre le résultat pour les matrices b'_α de rang 1 telles que $3x_{1,3,0} - 2x_{0,2,2} \neq 0$. Si

$$3x_{1,3,0} - 2x_{0,2,2} = 3x_{3,1,0} - 2x_{2,0,2} = 0,$$

et la matrice est de rang 1, elle représente un multiple de $\theta_1^2 \theta_2^2$.

Il reste donc à montrer que les matrices semipositives de rang 1 dans L correspondent aux classes $g(\theta_1^3 \theta_2)$. Or une matrice de rang 1 correspond à une classe $g(\theta_1^3 \theta_2)$ si et seulement si les équations suivantes, obtenues comme conditions sur la première colonne, sont satisfaites :

$$\begin{aligned} 3x_{3,0,0} - 2x_{2,0,2} &= 1, \\ 2x_{2,1,1} - 6x_{1,0,3} &= 2a, \\ x_{1,1,2} - 12x_{0,0,4} &= a^2, \end{aligned}$$

ce qui est le cas si et seulement si le polynôme $P(y)$ défini dans (26) admet une racine double réelle a . Par un raisonnement comme pour $g(\theta_1^2 \theta_2^2)$, on trouve que c'est le cas si et seulement si la classe est contenue dans L , ce qui fournit le résultat souhaité. \square

Remarque 4.6. Comme tous les modules irréductibles dans une décomposition de $\bigwedge^{2n-2} W^{\oplus n}$ sont isomorphes à $\det(W)^{\otimes n-1}$ ou à $\det(W)^{\otimes n-2} \otimes \mathbf{S}^2 W$, le cône $\text{Semi}^{2n-2}(A \times A)$ peut toujours être identifié avec le cône des matrices symétriques réelles semipositives 3×3 intersecté avec un demi-espace (cf. proposition 3.9). Pour des raisons comme dans la démonstration de la proposition 4.5, on devrait avoir

$$\mathbf{S}^{2n-2} \text{Psef}^1(A \times A) = \text{Psef}^{2n-2}(A \times A) = \text{Strong}^{2n-2}(A \times A) = \text{Semi}^{2n-2}(A \times A)$$

pour tout $n \geq 3$, et les rayons extrémaux de ce cône devraient correspondre aux classes $\text{GL}(W) \cdot (\theta_1^n \theta_2^{n-2})$ et $\text{GL}(W) \cdot (\theta_1^{n-1} \theta_2^{n-1})$. Mais pour l'instant, je ne vois pas de moyen pour montrer le cas général.

Avec un raisonnement semblable à celui utilisé dans la démonstration de la proposition 4.5, on peut montrer que le cône $\mathbf{S}^3 \text{Psef}^1(A \times A)$ s'identifie avec le cône engendré par les matrices de rang 1 dans la représentation du cône $\text{Semi}^3(A \times A)$ donnée dans (19) et (20).

Question 4.7. Si l'on regarde $\text{Semi}^k(A \times A)$ comme un sous-cône de $\text{Sym}_{k+1}^+(\mathbb{R})$, est-ce que, pour $1 \leq k \leq n$, l'ensemble des rayons extrémaux de $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A \times A)$ (resp. de $\mathbf{S}^{2n-k} \text{Psef}^1(A \times A)$) s'identifie avec l'ensemble des matrices semipositives de rang 1 dans $\text{Semi}^k(A \times A)$?

4.2 Classes numériquement effectives et classes pseudoeffectives

Dans [9], les auteurs montrent que, pour une surface abélienne A , la classe $\mu = 4\theta_1 \theta_2 - \lambda^2$ est nef mais pas pseudoeffective de sorte que l'on a une inclusion stricte

$\text{Psef}^2(A \times A) \subsetneq \text{Nef}^2(A \times A)$. Le résultat principal de cette section (proposition 4.9) est que l'on a, en toute dimension n ,

$$\text{Psef}^k(A^e) \subsetneq \text{Nef}^k(A^e)$$

pour tout entier positif $e \geq 2$ pour $2 \leq k \leq ne - 2$.

Rappelons d'abord qu'en tant que $\text{GL}(W)$ -modules, on a

$$\mathbf{S}^k \mathbf{N}^1(A \times A) = \bigoplus_{0 \leq 2i \leq 2k} \mu^i \cdot \mathbf{S}^{2k-4i} W \oplus \mathbb{R}_+ \mu^{n-k} \quad (27)$$

et $g \cdot \mu = \det(g)^2 \mu$ pour tout $g \in \text{GL}(W)$.

Lemme 4.8. *La classe μ^k est nef pour $k \in \{1, \dots, n\}$. En particulier, on a*

$$\mu^k \cdot \text{Psef}^{n-k}(A \times A) \subset \text{Nef}^{n+k}(A \times A).$$

Démonstration. Par la décomposition (27) et la proposition 2.16, il suffit de montrer que le cône $\text{Psef}^{2n-2k}(A \times A)$ est contenu dans le demi-espace

$$H_{\mu^{n-k}}^+ = \bigoplus_{0 \leq 2i \leq 2n-2k} \mu^i \cdot \mathbf{S}^{4(n-k)-4i} W \oplus \mathbb{R}_+ \mu^{n-k}.$$

Ayant $\text{Psef}^{2n-2k}(A \times A) \subset \text{Semi}^{2n-2k}(A \times A)$, il suffit de montrer que l'on a $\text{Semi}^{2n-2k}(A \times A) \subset H_{\mu^{n-k}}^+$. Pour une classe $\alpha \in \mathbf{N}^{2n-2k}(A \times A)$, la matrice b_α représentant B_α se décompose en blocs correspondant à une décomposition de $\bigwedge^{2n-2k} V_{\mathbb{R}}$ en $\text{GL}(W)$ -modules irréductibles (proposition 3.9). Comme $\det(W)^{\otimes n-k}$ est un module irréductible apparaissant dans une telle décomposition de $\bigwedge^{2n-2k} V_{\mathbb{R}}$, on a des blocs 1×1 dans la matrice b_α correspondant au module irréductible $\mathbf{S}^2(\det(W)^{n-k}) \simeq \mathbb{R} \mu^{n-k}$ pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^{2n-2k}(A \times A)$. Si l'on écrit $P_\alpha = \sum_{0 \leq 2i \leq 2n-2k} \mu^i P_i(\theta_1, \theta_2, \lambda)$ avec $P_i \in \mathbf{S}^{4(n-k)-4i} W$, selon la décomposition donnée dans la proposition 2.4, alors P_{n-k} est une constante et l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \mu^{n-k} &\rightarrow \mathbf{S}^2(\det(W)^{n-k}) \\ P_{n-k} &\mapsto L(\alpha) \end{aligned}$$

étant la multiplication par une constante réelle $c \neq 0$, on a $L(\alpha) = cP_{n-k}$. Si $c > 0$, on a donc $\text{Semi}^{2n-2k}(A \times A) \subset H_{\mu^{n-k}}^+$ et si $c < 0$, on a $\text{Semi}^{2n-2k}(A \times A) \subset H_{\mu^{n-k}}^-$. Comme la classe $\theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k}$ est semipositive, il suffit ainsi de montrer

$$\theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k} \in H_{\mu^{n-k}}^+.$$

Ecrivons $\theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k} = \sum_{0 \leq 2i \leq 2n-2k} \mu^i P_i$ avec $P_i \in \mathbf{S}^{4(n-k)-4i} W$, selon la décomposition (27). Alors P_{n-k} est une constante et on veut déterminer son signe. Comme le morphisme surjectif $\mathbf{S}^{2n-2k} \mathbf{N}^1(A \times A) \rightarrow \mathbf{N}^{2n-2k}(A \times A)$ correspond à une projection sur des facteurs irréductibles de $\mathbf{S}^{2n-2k} \mathbf{N}^1(A \times A)$, et comme μ^{n-k} engendre un module irréductible non nul dans $\mathbf{N}^{2n-2k}(A \times A)$ pour $k \leq n$, on peut supposer que A est de dimension $n - k$. Or on a $\mathbf{N}^{2n-2k}(A \times A) = \mathbb{R} \mu^{n-k}$, et $\mu^{n-k} P_{n-k}$ est donc juste un nombre d'intersection de $2n - 2k$ diviseurs effectifs, de sorte que l'on a $\mu^{n-k} P_{n-k} \geq 0$. Comme $\mu^{n-k} > 0$ par la remarque 2.16, on obtient $P_{n-k} > 0$, ce qui fournit le résultat souhaité. \square

Théorème 4.9. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension $n \geq 2$. Les classes $\theta_1^k \mu \in \mathbf{N}^{k+2}(A \times A)$ et $\theta_1^{n-2} \theta_2^k \mu \in \mathbf{N}^{n+k}(A \times A)$ ne sont pas semipositives mais neufs pour $0 \leq k \leq n - 2$, et l'on a*

$$\text{Psef}^k(A^e) \subsetneq \text{Nef}^k(A^e) \quad (28)$$

pour tout entier positif $e \geq 2$ et $2 \leq k \leq ne - 2$.

Démonstration. Par la proposition 4.8 il est clair que $\theta_1^k \mu$ et $\theta_1^{n-2} \theta_2^k \mu$ sont des classes nef pour $0 \leq k \leq n-2$. Pour voir que $\theta_1^k \mu$ n'est pas semipositive pour $0 \leq k \leq n$, il suffit de remarquer que la matrice b'_μ (cf. lemme 3.14) n'est pas semipositive, ce qui entraîne par le lemme 3.14 que $b'_{\theta_1^k \mu}$ n'est pas semipositive, et donc $\theta_1^k \cdot \mu \notin \text{Semi}^k(A \times A)$.

Pour voir que $\theta_2^k \theta_1^{n-2} \mu = 4\theta_2^{k+1} \theta_1^{n-1} - \theta_2^k \theta_1^{n-2} \lambda^2$ n'est pas semipositive, on regarde la matrice $h_{\theta_2^k \theta_1^{n-2} \mu}$ représentant $H_{\theta_2^k \theta_1^{n-2} \mu}$ dans la base standard de $\bigwedge^k V$. On montre qu'il y a un 2×2 mineur principal dont le déterminant est négatif. La matrice $h_{\theta_2^{k+1} \theta_1^{n-1}}$ est une matrice avec des coefficients zéros hors de la diagonale et des coefficients non zéros dans la diagonale pour les coordonnées $z_{i_1} \wedge \cdots \wedge z_{i_{n-1}} \wedge z_{j_1} \wedge \cdots \wedge z_{j_{k+1}}$ avec $i_1, \dots, i_{n-1} \in \{1, \dots, n\}$ et $j_1, \dots, j_{k+1} \in \{n+1, \dots, 2n\}$. En même temps la matrice $h_{\theta_2^k \theta_1^{n-2} \lambda^2}$ contient un coefficient non nul pour

$$z_{n+1} \wedge i\bar{z}_{n+1} \wedge \cdots \wedge z_{n+k} \wedge i\bar{z}_{n+k} \wedge z_1 \wedge i\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge z_{n-2} \wedge i\bar{z}_{n-2} \wedge z_{n+(n-1)} \wedge i\bar{z}_{n-1} \wedge z_{2n} \wedge i\bar{z}_n,$$

qui n'est pas sur la diagonale, et comme on n'a pas de coefficients de $\theta_2^k \theta_1^{n-2} \lambda^2$ dans la diagonale pour

$$z_{n+1} \wedge i\bar{z}_{n+1} \wedge \cdots \wedge z_{n+k} \wedge i\bar{z}_{n+k} \wedge z_1 \wedge i\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge z_n \wedge i\bar{z}_n,$$

cela entraîne le résultat.

Montrons maintenant l'inclusion (28). Par les arguments précédents, on a

$$\text{Semi}^k(A \times A) \subsetneq \text{Nef}^k(A \times A)$$

pour $2 \leq k \leq 2n-2$. Cela nous permet de raisonner par récurrence sur e pour n fixé, en supposant que l'énoncé est vrai pour $e-1$. De plus, on peut se restreindre à le montrer pour $2 \leq k \leq \lfloor \frac{ne}{2} \rfloor$ par dualité. Soit $\alpha \in \text{Nef}^k(A^{e-1})$ une classe nef non semipositive. Alors $p_{1, \dots, e-1}^* \alpha$ est nef et non semipositive par le lemme 4.1. Ayant $ne-2 \geq \lfloor \frac{ne}{2} \rfloor$ pour $n \geq 2, e \geq 2$, cela achève la démonstration. \square

Remarque 4.10. Par [9, Prop. 3.2], on a des isomorphismes $\cdot \mu^k : N^{n-k}(A \times A) \rightarrow N^{n+k}(A \times A)$ pour $1 \leq k \leq n$, et on se demande naturellement si les cônes de classes positives respectifs sont préservés, ce qui a été vérifié dans [9] pour $k = n-1$. Par le théorème 4.9, on voit que, pour $n = 3$, l'isomorphisme $\cdot \mu : N^2(A \times A) \rightarrow N^4(A \times A)$ ne préservent pas les classes pseudoeffectives, de sorte qu'en général, on ne peut pas s'attendre à ce que les cônes soient préservés.

Remarque 4.11. On montre également que les inéquations définissant $\text{Nef}^{2n-2}(A \times A)$ ne dépendent pas de n , si l'on écrit les inéquations en fonction des coordonnées associées à la base

$$\{\mu^{n-2} \cdot \theta_1^2, \mu^{n-2} \cdot \theta_1 \theta_2, \mu^{n-2} \cdot \theta_2^2, \mu^{n-2} \cdot \theta_1 \lambda, \mu^{n-2} \cdot \theta_2 \lambda, \mu^{n-2} \cdot \lambda^2\}$$

de $N^{2n-2}(A \times A)$. Comme les inéquations définissant $\text{Nef}^2(A \times A)$ ont été calculées dans [9] pour $n = 2$, on obtient ainsi des inéquations explicites définissant $\text{Nef}^{2n-2}(A \times A)$ pour tout $n \geq 2$.

D'autre côté, les inéquations définissant $\text{Nef}^2(A \times A)$ dépendent de n alors que le cône $\text{Psef}^2(A \times A) = \text{Semi}^2(A \times A)$ ne dépend pas de n pour $n \geq 2$.

Remarque 4.12. Tous les résultats obtenus pour une variété abélienne principalement polarisée très générale A concernant la structure algébrique de $N^\bullet(A^e)$ et les cônes dans $N^k(A^e)$ sont également vrais pour une variété abélienne A principalement polarisée quelconque si l'on se restreint à la \mathbb{R} -algèbre $N_{\text{can}}^\bullet(A^e) \subset N^\bullet(A^e)$ engendrée par les θ_i et les $\lambda_{j,k}$, $0 \leq i \leq e, 1 \leq j < k \leq e$.

Remarquons de plus qu'une isogénie $f : B \rightarrow B'$ entre deux variétés abéliennes induit un isomorphisme $f^* : N^\bullet(B') \rightarrow N^\bullet(B)$ qui préserve les cônes en question [9, Prop. 1.6]. Les résultats pour $N^\bullet(A^e)$ pour A principalement polarisée très générale sont donc également vrais pour $N^\bullet(B)$ si B est isogène à A^e .

Références

- [1] S. Abeasis. The $GL(V)$ -invariant ideals in $S(S^2(V))$. *Rend. Mat.*, (6) 13 :235–262, 1980.
- [2] A. Barvinok. *A course in convexity*, volume 54 of *Grad. Stud. Math.* American Mathematical Society, 2000.
- [3] J. P. Demailly. *Complex Analytic and Differential Geometry*. 2009.
- [4] F. Hazama. Algebraic cycles on certain abelian varieties and powers of special surfaces. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math*, 31 :2487–520, 1985.
- [5] R. Howe. Remarks on classical invariant theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 313(2) :239–570, 1989.
- [6] R. Harvey, Q.W. Knapp. Positive (p,p) forms, Wirtinger’s inequality, and currents. In *Value-distribution theory, Part A*, pages 43–62, 1974.
- [7] C. Birkenhake, H. Lange. *Complex Abelian Varieties*, volume 302 of *Grundlehren Math. Wiss.* Springer, 2003.
- [8] B. Lawson. The stable homology of a flat torus. *Math. Scand.*, 36 :49–73, 1975.
- [9] O. Debarre, L. Ein, R. Lazarsfeld et C. Voisin. Pseudoeffective and nef classes on abelian varieties. *Compos. Math. to appear*.
- [10] A. Prendergast-Smith. The cone conjecture for abelian varieties. *preprint*, 2010. arxiv :1008.4509v1 [math.AG].
- [11] K. Ribet. Hodge classes on certain types of abelian varieties. *Amer. J. Math.*, 105 :523–538.
- [12] T. Tambour. A note on some representations of $SL(V)$. *Indag. Math.*, 6 (4) :505–509, 1995.
- [13] S. G. Tankeev. Cycles on simple abelian varieties of prime dimension (in russian). *Izv. Akad. Nauk USSR Ser. Mat.*, 46 :155 – 170.
- [14] G. Thompson. Skew invariant theory of symplectic groups, pluri-Hodge groups and 3-manifold invariants. *Int. Math. Res. Not.*, 10.1093/imrn/rnm048, 2007.
- [15] J.M. Weyman. *Cohomology of Vector Bundles and Syzygies*, volume 149 of *Cambridge Tracts in Math.* Cambridge University Press, 2003.